

## Navidezne sile pri matematičnem modeliranju gibanja preje – 2. del: Gibalna enačba

*V prvem delu članka smo pokazali, od kod izvirajo sistemske sile v gibalnih enačbah, zapisanih v neinercialnih opazovalnih sistemih. V nadaljevanju bomo pokazali, kako se te »navidezne« sile kažejo v gibalni enačbi preje, zapisani v vrtečem se koordinatnem sistemu. Poleg Coriolisove in centrifugalne sile pri časovno spremenljivi kotni hitrosti nastane še tretja sistemska sila, ki vpliva na dinamiko preje.*

*Ključne besede: dinamika preje, teorija balona, neinercialni opazovalni sistemi, sistemske sile*

### Virtual Forces in the Mathematical Model of Yarn Unwinding (Part Two)

*In the first part of the paper we have shown the origin of the system forces in equations of motion in a noninertial observation frame. Now it is presented how these virtual forces appear in the equation of motion for yarn, expressed in a rotating coordinate system. In addition to Coriolis and centrifugal force, there is another system force in rotating frames with time dependant angular velocity. This force affects the yarn dynamics.*

*Key words: dynamics of yarn, balloon theory, noninertial systems, virtual forces.*

### 1.0 UVOD

Newtonova enačba gibanja za točkasto telo v vrtečem se opazovalnem sistemu se glasi

$$F - 2m\omega \cdot v' - m\dot{\omega} \cdot r' - m\dot{\omega} \cdot r' = ma' \quad (1)$$

Vidimo, da je v neinercialnem sistemu telo pospešeno ne le zaradi pravih zunanjih sil  $F$ , temveč tudi zaradi sistemskih sil. Te so Coriolisova in centrifugalna sila ter sila zaradi časovno spremenljive kotne hitrosti,  $-m\dot{\omega} \cdot r'$ .

### 2.0 Gibalna enačba preje

Ob privzetkih zanemarljive prečne razsežnosti preje in idealne upogljivosti dobimo naslednjo gibalno enačbo preje v inercialnem opazovalnem sistemu [1]:

$$\rho D^2 \mathbf{r} = \frac{\partial}{\partial s} (T \mathbf{t}) + \mathbf{f}_z, \quad D = \frac{d}{dt} = \left( \frac{\partial}{\partial t} - V \frac{\partial}{\partial s} \right) \quad (2)$$

Pri tem je  $\rho$  linearna gostota mase, torej masa preje na enoto dolžine, ki (pri raztegljivi preji) ni nujno kon-

stantna. Vektor  $\mathbf{r}(s, t)$  je radij vektor, ki kaže na infinitezimalno kratek odsek preje, ki je ob času  $t$  od izhodišča oddaljen za ločno dolžino  $s$ . Mehansko napetost označujemo s  $T(s, t)$ ,  $\mathbf{t}(s, t)$  pa je tangentni vektor na prejo v obravnavani točki in je enak parcialnemu odvodu radij vektorja  $\mathbf{r}$  po ločni dolžini,  $\mathbf{t} = \partial \mathbf{r} / \partial s$ . Vektor  $\mathbf{f}_z$  označuje linearno gostoto zunanjih sil, ki delujejo na obravnavani odsek preje. Operator  $D$  je operator totalnega časovnega odvoda, ki sledi gibanju točke na preji. Odvijalno hitrost preje, torej hitrost, s katero prejo med odvijanjem vlečemo skozi vodilo, označimo z  $V$ .

V vrtečem se koordinatnem sistemu dobi enačba (2) podobno obliko kot enačba (1) [1, 2]:

$$\rho \mathcal{D}^2 \mathbf{r} = \frac{\partial}{\partial s} (T \mathbf{t}) + \mathbf{f}_z - 2\rho \boldsymbol{\omega} \times \mathcal{D} \mathbf{r} - \rho \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) - \rho \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}, \quad \mathcal{D} = \left( \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{K'} - V \frac{\partial}{\partial s} \right) \quad (3)$$

Operator totalnega časovnega odvoda  $\mathcal{D}$ , ki sledi gibanju točke znotraj vrtečega se koordinatnega sistema [1], je z operatorjem  $D$  povezan z enačbo

$$D = \mathcal{D} + \boldsymbol{\omega} \times \quad (4)$$

Ta izraz je podoben enačbi  $(\partial/\partial t)_K = (\partial/\partial t)_{K'} + \boldsymbol{\omega} \times$ , ki smo jo izpeljali v prvem delu članka. Tudi tu dobi

enačba pomen, ko jo uporabimo na neki vektorski funkciji  $\mathbf{p}$ , tako da je na primer  $D\mathbf{p} = \mathcal{D}\mathbf{p} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p}$ . Analogija z Newtonovim zakonom v vrtečem se opazovalnem sistemu za točkasto telo (1) je tako lepo razvidna. Obe enačbi sta enaki po strukturi in tudi posamezne člene si lahko interpretiramo na enak način. Z gostoto (kar ustreza masi) pomnoženi pospešek  $\mathcal{D}^2\mathbf{r}$  je enak vsoti notranjih napetostnih sil ( $\partial/\partial s (T\mathbf{t})$ ), zunanjih sil ( $\mathbf{f}_2$ ) in sistemskih sil: te so Coriolisova sila  $2\rho\boldsymbol{\omega} \cdot \mathcal{D}\mathbf{r}$ , centrifugalna sila  $-\rho\boldsymbol{\omega} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$  in sila zaradi kotnih pospeškov  $-\rho\dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot \mathbf{r}$ .

Sistemske sile, ki delujejo na kratek odsek preje, so prikazane na sliki 1. Centrifugalna in Coriolisova sila sta dobro poznani, poudarili pa bi radi sistemsko silo  $-\rho\dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot \mathbf{r}$ . Ta kaže v smeri Coriolisove sile, ko je točka dviga preje na sprednjem robu navitka. Tedaj se namreč kotna hitrost  $\boldsymbol{\omega}$  povečuje [1]. Vektor kotnega pospeška  $\dot{\boldsymbol{\omega}}$  je na sliki narisano črtkano. Ko pa je točka dviga preje na zadnjem robu navitka, ta sila kaže v nasprotni smeri kot Coriolisova sila, saj se tedaj kotna hitrost  $\boldsymbol{\omega}$  zmanjšuje in vektor kotnega pospeška  $\dot{\boldsymbol{\omega}}$  kaže v nasprotni smeri kot na sprednjem robu navitka. Na sredini navitka, ko so razmere kvazistacionarne in se s

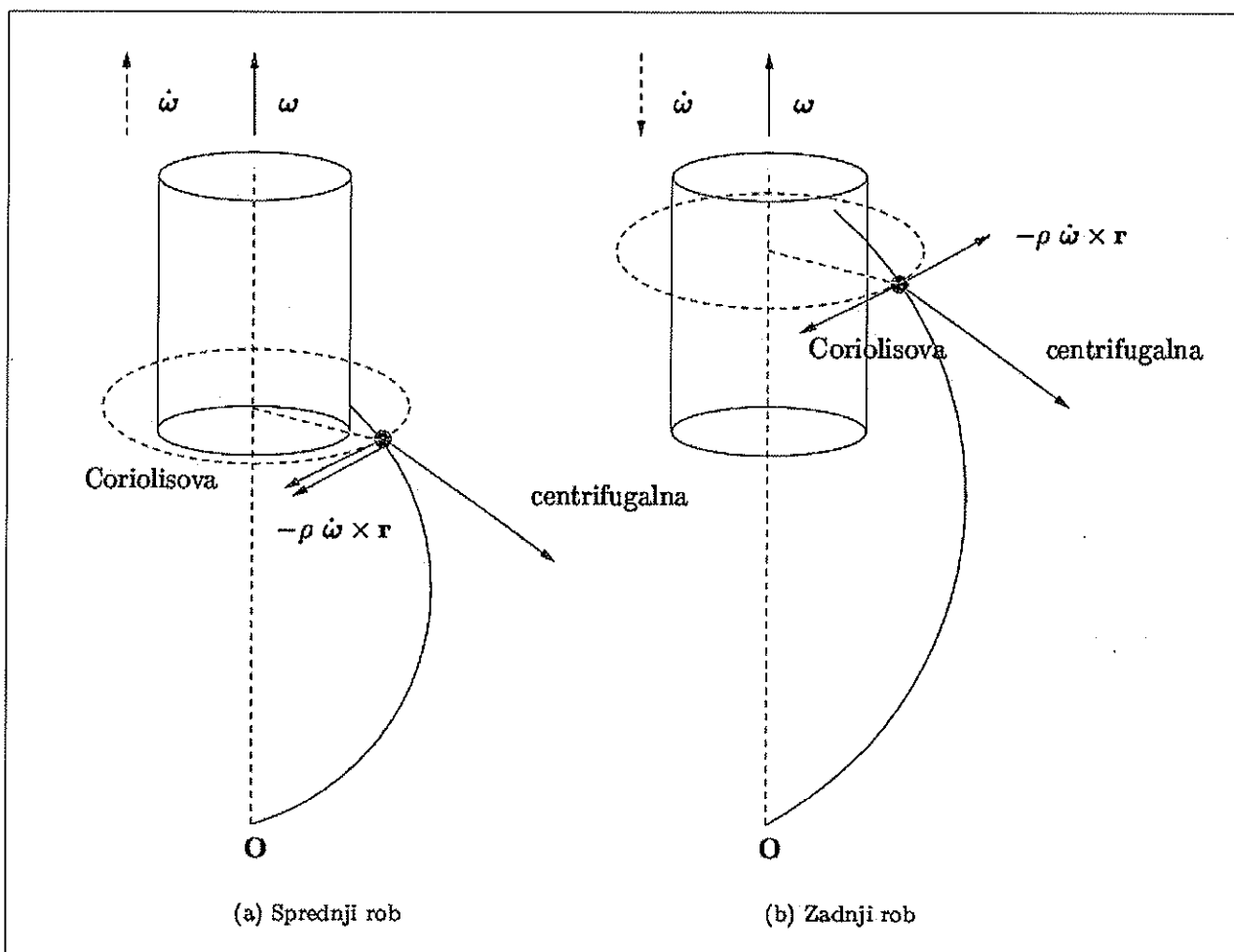
časom spreminjajo le počasi, te sile ni. (To seveda velja le za plasti z velikim številom ovojev, torej za precizijsko navite navitke.)

Omenjena sila vpliva na gibanje preje na robovih navitka, kjer se kot navijanja obrne. Tako hitra sprememba kota navijanja povzroči naglo spremembo kotne hitrosti  $\boldsymbol{\omega}$ , kar pomeni, da je kotni pospešek  $\dot{\boldsymbol{\omega}}$  velik. Zato je tudi sistemska sila  $-\rho\dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot \mathbf{r}$  velika in spremeni dinamiko preje. Iz kvazistacionarnih razmer pridemo tedaj v prehodno območje, ko se gibanje preje naglo spreminja. Zato lahko na robovih prihaja do nestabilnosti v obliki balona, nitka se lahko zagozdi in pride do pretrganja.

Na kratek odsek preje delujejo centrifugalna, Coriolisova sila in sila  $-\rho\dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot \mathbf{r}$ .

### 3.0 VPLIV TRETJE SISTEMSKE SILE NA DINAMIKO PREJE

Kotna hitrost  $\boldsymbol{\omega}$  je večja pri odvijanju preje v smeri nazaj po navitku kot v smeri naprej, kar je posledica končnega kota navijanja. Razlika je zelo majhna pri



Slika 1: Sistemska sila na kratek odsek preje

gosto vzporedno navitih precizijskih navitkih, pri križno navitih navitkih pa je lahko občutna. Vpliv tretje systemske sile na dinamiko preje lahko ocenimo, če jo na primer primerjamo s centrifugalno silo. Razmerje med silama je:

$$\frac{m\dot{\omega}r'}{m\omega^2r'} = \frac{\dot{\omega}}{\omega^2} \quad (5)$$

Kotno hitrost pri odvijanju nazaj označimo z  $\omega_+$ , kotno hitrost pri odvijanju naprej pa z  $\omega_-$ . V zgornjem izrazu za razmerje lahko namesto  $\omega$  vzamemo povprečje  $(\omega_+ + \omega_-)/2$ . Tej hitrosti ustreza perioda (čas odvijanja enega navoja)  $\tau_0 = 2\pi/\omega_0$ . Kotni pospešek lahko ocenimo z

$$\dot{\omega} = \frac{\omega_+ - \omega_-}{T} \quad (6)$$

kjer je  $T$  čas, v katerem preidemo iz odvijanja v smeri nazaj v odvijanje v smeri naprej. Ker se to zgodi na razdalji nekaj navojev  $n$ , lahko ocenimo  $T = n\tau_0$ , kjer je  $n$  majhno število. Tako dobimo naslednji izraz za razmerje med sistemskima silama

$$\frac{\dot{\omega}}{\omega^2} = \frac{2\pi\omega_+ - \omega_-}{n\omega_0} \quad (7)$$

Faktor  $2\pi/n$  lahko približno ocenimo z 1, saj je  $n$  majhno število. Ugotovimo torej, da je vpliv tretje systemske sile enak razmerju med razliko kotnih hitrosti v obeh smereh in povprečno kotno hitrostjo. Pri križnih navitkih se lahko kotni hitrosti razlikujeta za več deset odstotkov, zato je lahko systemska sila  $-\rho\dot{\omega} \cdot r$  občutna.

#### 4.0 SKLEP

Pokazali smo analogijo med Newtonovo enačbo za telo in gibalno enačbo za prejo v neenakomerno vrtečem se koordinatnem sistemu. Opisali smo pogosto zanemarjeno systemsko silo  $-\rho\dot{\omega} \cdot r$  in dokazali, da lahko ta spremeni dinamiko preje na robovih navitkov.

#### Literatura

- [1] PRAČEK, S. *Modifikacija dinamike odvijanja preje : Doktorsko delo*. Ljubljana : Univerza v Ljubljani, Naravoslovnotehniška fakulteta, Oddelek za tekstilstvo, 2002.
- [2] PRAČEK, S. in JAKŠIČ, D. Teorija odvijanja preje z navitka - Izpeljava gibalnih enačb. *Tekstilec*, 2002, vol. 45, str. 5-6, str. 119-123.

Prispelo/Received: 09-2004; sprejeto/accepted: 01-2005