

Matematični model za simulacijo procesa odvijanja preje

2. del: stožčasti navitki

Z matematičnim modeliranjem je možno simulirati odvijanje preje z navitkov različnih oblik in tako poiskati navitke, ki omogočajo visoke hitrosti odvijanja pri majhnih in enakomernih napetostih v preji. Z razliko od valjastih navitkov je pri stožčastih navitkih kotna hitrost odvijanja preje odvisna ne le od kota navijanja, temveč tudi od kota stožca. Prikazali bomo, da je brezdimenzijska kotna hitrost le malo odvisna od kota stožca. Ker pa kot stožca določa tudi radij navitka v točki dviga, je kotna hitrost lahko sorazmerno večja. Primerjali bomo odvijanje z valjastega in stožčastega navitka z enakima najmanjšima radijema in pokazali, da poteka odvijanje s stožčastega navitka hitreje, saj je radij navitka v točki dviga v povprečju večji.

Ključne besede: matematični model navitka, kot navijanja, kot stožca, teorija balona

Mathematical Model for Simulating Yarn Unwinding from Packages Part 2: Conic Packages

Mathematical modeling can be used to simulate unwinding of yarn from packages of different shapes. In this way one can find packages that sustain high unwinding velocities at low and steady tension in the yarn. In the case of conic packages the angular velocity of unwinding depends not only on the winding angle as is the case for cylindrical packages, but also on the apex angle. We will show that the dimensionless angular velocity depends very little on the apex angle. This angle, however, also determines the radius of the package at the lift-off point, therefore the angular velocity can be proportionally higher. We will compare unwinding from a cylindrical and a conic package with equal smallest radius and show that unwinding from the conic package is faster due to higher average radius of the package at the lift-off point.

Keywords: mathematical model of a package, winding angle, apex angle, balloon theory.

UDK 519.87 : 677.023.2

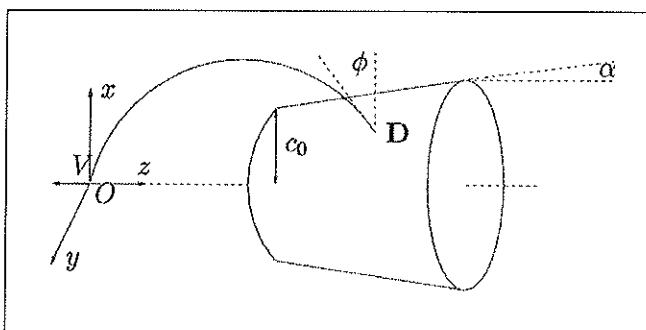
1.0 UVOD

Pri odvijanju preje z valjastih navitkov je kotna hitrost odvijanja odvisna od premera navitka, odvijalne hitrosti in od kota navijanja. Še posebej je pomemben slednji parameter, saj vpliva na nihanje napetosti v preji [1, 2]. Tu bomo pokazali, v kolikšni meri na proces odvijanja vpliva kot stožca pri stožčastih navitkih. Nato bomo razvili enostaven matematični model, s katerim dejansko simuliramo proces odvijanja.

2.0 ODVISNOST KOTNE HITROSTI OD NAVIJALNEGA KOTA PRI STOŽČASTIH NAVITKIH

Sedaj obravnavamo odvijanje preje s stožčastega navitka (slika 1). Kot stožca označimo z α , kot navijanja ϕ pa je tudi v tem primeru definiran kot kot med tangento na površino stožca, pravokotno z osjo, in tangento na prejo v točki dviga.

Stožčasti navitek ima najmanjši radij c_0 in kot stožca α .


Slika 1: Odvijanje preje s stožčastega navitka

Izpeljava formule, ki med seboj povezuje kotno hitrost ω , kota α in ϕ , ter hitrost odvijanja V in »radij« stožca v točki odvijanja c , bo tokrat drugačna, saj ne moremo ubrati preprostega geometrijskega pristopa kot v prejšnjem primeru.

Naj bo hitrost, s katero preja zapušča površino navitka. Ta hitrost ni nujno enaka hitrosti odvijanja V , in sicer velja [3, 4]:

$$V_1 = V + \frac{ds}{dt}, \quad (1)$$

kjer je s dolžina preje v balonu med vodilom in točko dviga. K hitrosti odvijanja V smo morali prišteti časovni odvod dolžine s : to je »hitrost«, s katero se »podaljšuje« dolžina preje v balonu. Hitrost V_1 je sestavljena iz dveh prispevkov, saj se nekaj odvite preje previje skozi vodilo, nekaj preje pa ostane v balonu in ga »podaljša«.

V času ene periode $t = 2\pi/\omega$ se odvije $L = 2\pi c/\cos\phi$. Pri tem smo privzeli, da se »radij« stožca spremeni le malo na razdalji enega navoja. Ta približek velja dobro tedaj, ko sta kot stožca in kot navijanja majhna, torej za večino navitkov, ki se dejansko uporabljajo. Ker je po definiciji $V_1 = L/t$, dobimo

$$V_1 = c\omega/\cos\phi. \quad (2)$$

Količino ds/dt izračunamo s posrednim odvajanjem

$$\frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dz_1} \frac{dz_1}{dt}, \quad (3)$$

kjer je z_1 koordinata z točke dviga, ki se med odvijanjem premika gor in dol po navitku. Pri valjastih navitkih velja

$$\frac{dz_1}{dt} = \frac{M}{t} = \frac{2\pi c \tan\phi}{2\pi/\omega} = c\omega \tan\phi, \quad (3)$$

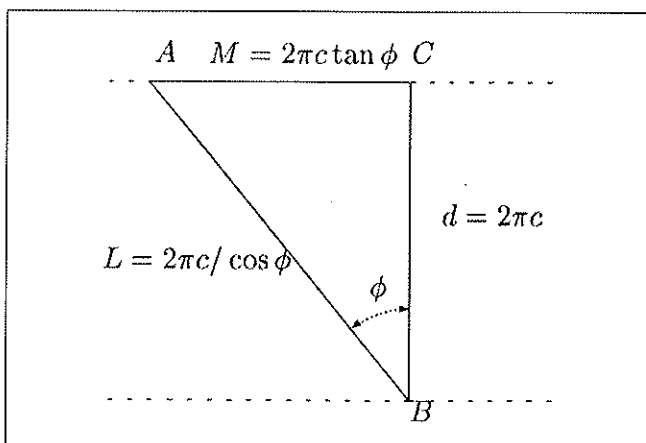
kar je razvidno iz slike 2. Pri stožčastih navitkih so premiki v smeri koordinate z manjši za faktor $\cos\alpha$: ko se točka dviga premakne za M na površini navitka, se njena komponenta z spremeni za $M \cos\alpha$. V to se lahko hitro prepričamo, če v mislih stožec prerežemo vzdolž osi z . Velja torej

$$\frac{dz_1}{dt} = c\omega \tan\phi \cos\alpha. \quad (4)$$

Pri kvazistacionarnem gibanju približno velja, da se dolžina balona s spremeni za toliko, kot se je točka dviga premaknila v smeri koordinate z . Z enačbo to zapišemo kot

$$\frac{ds}{dz_1} = 1. \quad (5)$$

Boljšega približka ne moremo dobiti, ne da bi popolnoma rešili problem odvijanja preje, opisanega v prejšnjih člankih [5, 6].



Slika 2: Prerez navitka vzdolž osi po premici tvorilki. Kot navijanja je pozitiven, če se pri odvijanju točka odvijanja giblje proti večjim koordinatam z (odvijanje nazaj). Kot navijanja je negativen, če se pri odvijanju točka odvijanja giblje proti manjšim koordinatam z (to je odvijanje naprej).

Sedaj vstavimo izraze (2) do (5) v (1) in dobimo

$$\frac{c\omega}{\cos\phi} = V + c\omega \tan\phi \cos\alpha, \quad (6)$$

kar lahko zapišemo tudi v končni obliki

$$\omega = \frac{V \cos\phi}{c(1 - \cos\alpha \sin\phi)}. \quad (7)$$

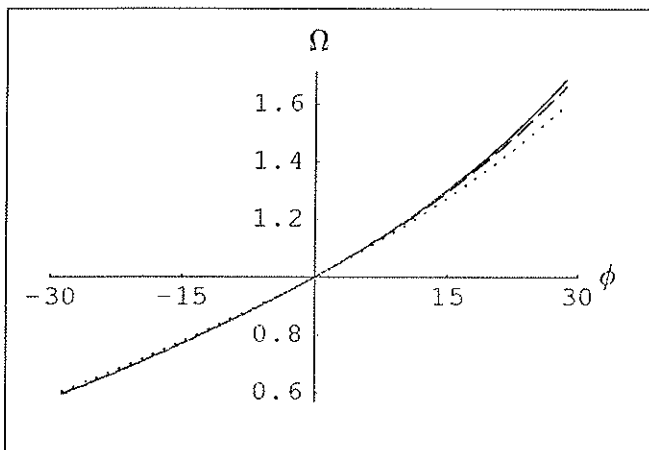
V enačbo moramo vstaviti »radij« stožca c pri trenutnem položaju točke dviga. Če z c_0 označimo najmanjši radij in z z »višino« točke dviga, pri čemer $z=0$ ustreza robu stožca, ki je najbližji vodilu, potem velja

$$c = c_0 + z \tan\alpha. \quad (8)$$

Bredimenzijsko kotno hitrost lahko vpeljemo kot prej, in sicer z $\Omega = c\omega/V$, pri čemer uporabimo trenutni radij c . Dobimo

$$\Omega = \frac{\cos\phi}{1 - \cos\alpha \sin\phi}. \quad (9)$$

Vpliv kota stožca na brezdimenzijsko kotno hitrost je prikazan na sliki 3. Vidimo, da je vpliv tipičnega kota stožca na brezdimenzijsko kotno hitrost praktično zanemarljiv. V izračunih pa moramo upoštevati, da je kotna hitrost ω odvisna od trenutnega kota navijanja ϕ in od trenutnega radija c . Spreminjanju teh količin je posvečen naslednji razdelek.



Slika 3: Vpliv kota stožca na kotno hitrost

Prikazan je vpliv kota stožca α na odvisnost med brezdimenzijsko kotno hitrostjo in kotom navijanja. Prikazani koti so $\alpha \sim 0^\circ$ (polna črta), $\alpha = 10^\circ$ (črtkana) in $\alpha = 20^\circ$ (točke). Uporabljena kota 10° in 20° sta pretirana zaradi večje nazornosti. Poudarili smo, da se odvisnost brezdimenzijske kotne hitrosti od kota navijanja tudi pri zelo velikih kotih stožca le malo razlikuje od te odvisnosti pri valjastih navitkih.

3.0 GIBANJE TOČKE DVIGA MED ODVIJANJEM

Med odvijanjem se točka dviga giblje gor in dol po navitku. Oglejmo si, kako se točka premakne v infinitezimalno kratkem času dt . Če gibanje obravnavamo v cilindričnem koordinatnem sistemu $(r\theta z)$, kjer je r razdalja točke od osi, θ polarni kot, z pa »višina«, potem je infinitezimalna sprememba polarnega kota podana z $d\theta = \omega dt$. Trenutno kotno hitrost ω izračunamo iz enačbe (1) iz prvega dela članka za valjasti navitek, oziroma iz enačbe (7) za stožčasti navitek.

V času dt se točka dviga premakne za $dl = cd\theta$ po obodu navitka. Pri valjastih navitkih je c radij navitka in je konstanten, pri stožčastih pa v enačbo vstavimo trenutni radij stožca, ki je podan z enačbo (8).

Po definiciji je kot navijanja ϕ definiran kot kot med tangento na površino stožca, pravokotno z osjo, in tangento na prejo v točki dviga. Z enačbo to zapišemo kot $\tan\phi = dz/dl$. Infinitezimalni premik točke v smeri osi z je torej

$$dz = c\omega \tan\phi dt. \quad (10)$$

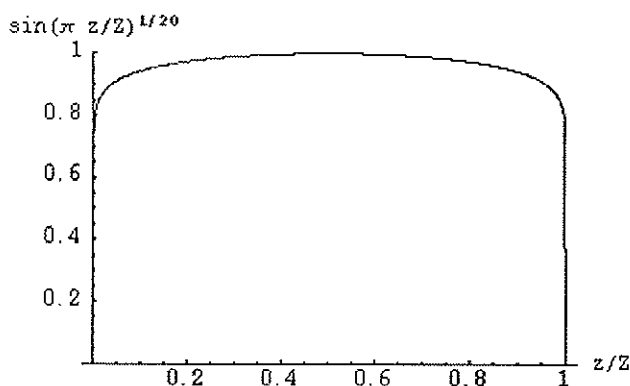
V enačbo seveda vstavimo trenutni kot navijanja ϕ . Ta je med gibanjem točke dviga gor in dol po navitku približno konstanten, predznak pa se mu na robu navitka hitro spremeni. Če je na spodnjem robu navitka $z = 0$, na zgornjem pa $z = Z$, potem je kot ϕ v odvisnosti od koordinate z takšna funkcija, ki je v bližini $z = 0$ in $z = Z$ približno enaka nič (saj na robovih navitka kot ϕ sprevrže predznak), sicer pa je enaka kotu navijanja plasti ϕ_0 . Tem pogojem na primer ustreza funkcija

$$\phi(z) = \phi_0 \sin\left(\pi \frac{z}{Z}\right)^{1/20}, \quad (11)$$

ki je prikazana na sliki 4. V enačbo moramo vstaviti kot navijanja v plasti, ki se trenutno odvíja, ϕ_0 . Pri odvijanju naprej je ta kot negativen, pri odvijanju nazaj pa pozitiven).

Gibanje točke po navitku dobimo torej kot rešitev diferencialne enačbe prvega reda (10), ki jo lahko zapišemo v obliki

$$\frac{dz}{dt} = c(z)\omega(c(z), \phi(z)) \tan\phi(z). \quad (12)$$

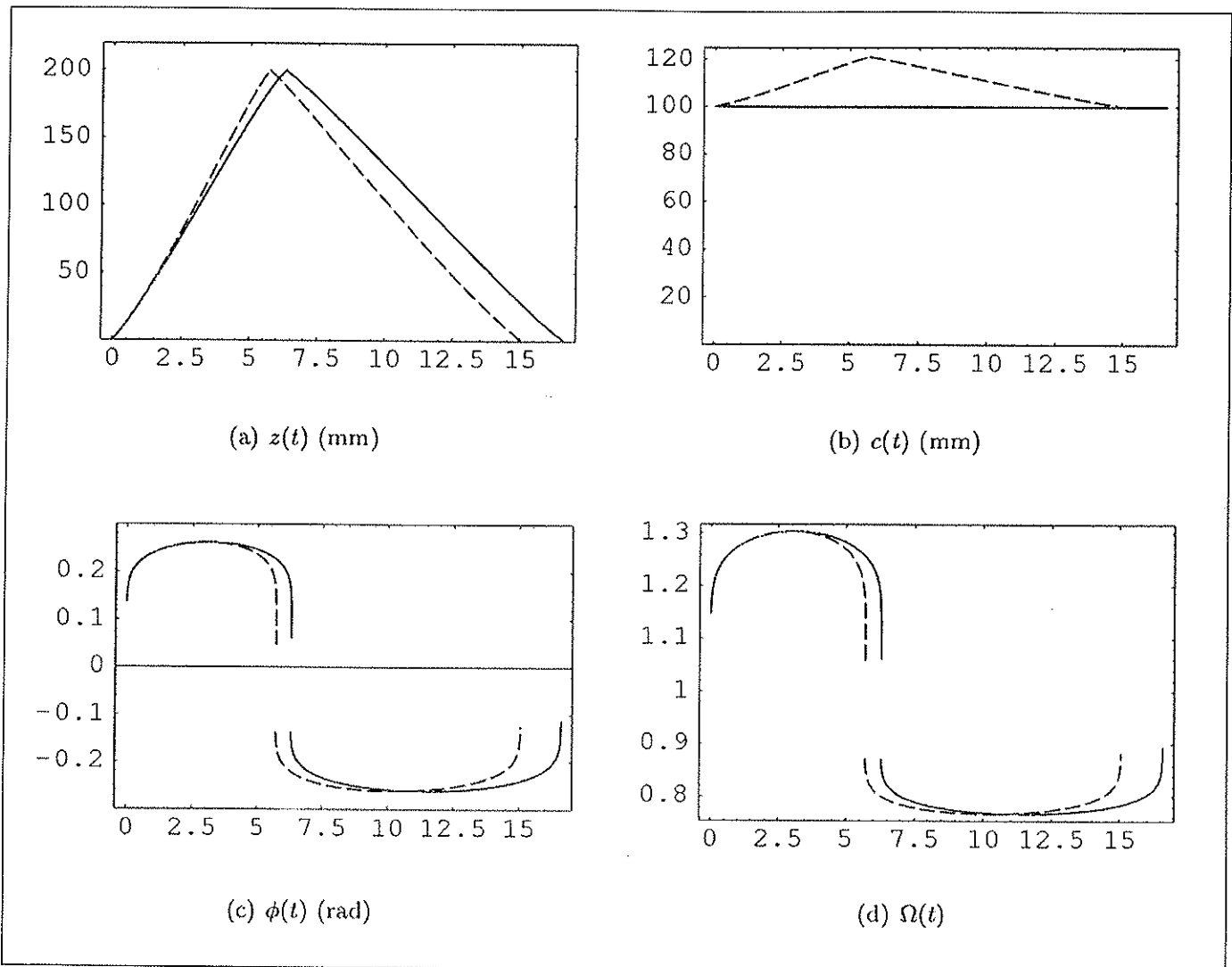


Slika 4: Funkcija $\sin(\pi z/Z)^{1/20}$

Poudarili smo, kakšne so od z odvisne količine, ki nastopajo na desni strani enačbe.

Enačbo lahko rešimo numerično, na primer z metodo Runge-Kutta [7], in dobimo časovno odvisnost $z(t)$ položaja točke dviga med odvijanjem. Kot stranski produkt bomo dobili tudi časovno odvisnost »radija« navitka $c(t)$, časovno odvisnost kota $\phi(t)$ ter trenutno kotno hitrost $\omega(t)$. Vse navedene časovne odvisnosti so prikazane na sliki 5 za primera valjastega ter stožčastega navitka.

V obeh primerih poteka odvijanje nazaj (ko z narašča) hitreje kot odvijanje nazaj (ko z upada), ker je pri odvijanju nazaj kotna hitrost ω (oziroma Ω) večja (slika 5(a)). Vidimo tudi, da se stožčasti navitek odvíja nekoliko hitreje, ker je kotna hitrost odvijanja $\omega = c/V\Omega$ malo večja, saj je v povprečju »radij« c večji (slika 5(b)).



Slika 5: Časovne odvisnosti količin z , c , ϕ in Ω med odvijanjem z valjastega (polna črta) in stožčastega navitka (črtkana črta). Oba navitka imata (najmanjši) radij 100 mm, dolga sta 200 mm, največji kot navijanja je 15° , kot stožca pri stožčastem navitku pa je 6° . Čas je izražen v sekundah.

4.0 SKLEP

Izpeljali smo izraza, ki podajata odvisnost kotne hitrosti vrtenja balona okoli osi z od radija navitka, hitrosti odvijanja in kota navijanja med odvijanjem preje z valjastega ali stožčastega navitka. Izraza omogočata obravnavo gibanja točke dviga gor in dol po navitku, kot smo pokazali v nadaljevanju. Metoda omogoča tudi obravnavo bolj splošnih navitkov, saj sta $c(z)$ in $\phi(z)$ poljubni funkciji, s katerima opišemo obliko navitka ter tip navijanja v posameznih plasteh. Tako lahko simuliramo odvijanje preje s poljubno zgrajenih navitkov in poiščemo navitek z ustreznimi lastnostmi.

VIRI

[1] KONG, XM., RAHN, D. in GOSWAMI, BC. Steady-state unwinding of yarn from cylindrical packages. *Textile Research Journal*, 1999, vol 69, no. 4, p. 292-306.

[2] FRASER, WB., GOSH, TK. in BATRA, SK. On unwinding yarn from cylindrical package. *Proc. R. Soc. Lond.*, 1992, vol. A. 436, p. 479-498.

[3] PADFIELD, DG. A note on the fluctuations of tension during unwinding. *Journal of Textile Institute*, 1956, vol. 47, p. 301-308.

[4] PADFIELD, DG. The motion and tension of an unwinding thread. *Proc. R. Soc.*, 1958, vol. A 245, p. 382-407.

[5] PRAČEK, S. in JAKŠIĆ, D. Teorija odvijanja preje z navitka – Izpeljava gibalnih enačb. *Tekstilec*, 2002, let. 45, štev. 5-6, str.119.

[6] PRAČEK, S. in JAKŠIĆ, D. Teorija odvijanja preje z navitka – Robni pogoji in sila zračnega upora. *Tekstilec*, 2002, let. 45, štev. 7-8, str. 175.

[7] PRESS, WH., TEUKOLSKY, SA., VETTERLING, WT. in FLANNERY, BP. *Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing*. Cambridge : Cambridge University Press, 2. ed., 1992.

Prispelo/Received: 02-2004; sprejeto/accepted: 12-2004