

Drsenje preje po navitku med odvijanjem: 2. del: Delna analitična rešitev

V prvem delu članka smo izpeljali enačbe za drsenje preje po navitku in pokazali, kako jih poenostavimo na dvodimenzionalni problem. Čeprav enačbe izgledajo kompleksne, jih lahko delno analitično rešimo in pridemo do zanimivih ugotovitev.

Ključne besede: dinamika preje, trenje med prejo in navitkom, teorija balona, robni pogoji.

Sliding motion of Yarn on the Package During Unwinding: Part 2: Partial Analytic Solution

In the first part of the paper we have derived the equations that describe the sliding motion of yarn on the surface of a package and we have shown how they can be reduced to a two-dimensional problem. In spite of the seemingly complex form of the equations, they can be partially analytically solved.

Key words: dynamics of yarn, friction between yarn and package, balloon theory, boundary conditions.

UDK 677.023.2

1.0 UVOD

Med odvijanjem preje z navitka preja drsi po površini navitka, preden se dvigne in potem tvori balon. Točko, v kateri preja začne drseti, imenujemo točka odvijanja, točko, v kateri preja zapusti površino navitka, pa imenujemo točka dviga. Na tem odseku preje, med točko odvijanja in točko dviga, napetost v preji pade z vrednosti napetosti, ki je v balonu (v točki dviga) na rezidualno napetost, ki jo ima preja v notranjosti navitka. Enačbe, ki opisujejo drsenje preje po površini navitka, so znane: izpeljali smo jih v prvem delu članka [1]. Možno jih je delno analitično rešiti, kot bomo prikazali v nadaljevanju.

2.0 DELNA ANALITIČNA REŠITEV

Enačbo (8) iz prvega dela članka [2] pomnožimo z $c\theta'$, enačbo (9) pa z' , ju seštejemo in preuredimo:

$$\rho V^2(c^2\theta'\theta'' + z'z'') = T(c^2\theta'\theta'' + z'z'') + T'(c^2\theta'^2 + z'^2) + c\theta'f_\theta + z'f_z \quad (1)$$

V tej enačbi je ρ linearna gostota preje, V hitrost odvijanja, c polmer navitka, T napetost v preji, f linearna go-

stota sile trenja, položaj točke na preji pa je opisan v valjnem koordinatnem sistemu $(r\theta z)$. S črtico ob simbolu označujemo odvajanje po ločni dolžini s . Sedaj upoštevamo še pogoj za nerazteznost: s tem privzamemo, da lahko zanemarimo raztezanje preje. Ta pogoj (enačba (24) v [2]) se pri gibanju preje na površini valja zapiše kot

$$c^2\theta'^2 + z'^2 = 1 \quad (2)$$

Če to enačbo odvajamo, dobimo

$$c^2\theta'\theta'' + z'z'' = 0 \quad (3)$$

Izraza (2) in (3) vstavimo v enačbo (1) in dobimo

$$T' = -c\theta'f_\theta - z'f_z \quad (4)$$

V to enačbo vstavimo izraza za komponenti gostote sile

$$f_\theta = -\mu n c(\omega - V\theta') / \sqrt{c^2(\omega - V\theta')^2 + z'^2 V^2}, \\ f_z = \mu n z' V / \sqrt{c^2(\omega - V\theta')^2 + z'^2 V^2}. \quad (5)$$

in dobimo

$$T' = \frac{\mu n}{\sqrt{c^2(\omega - V\theta')^2 + V^2 z'^2}} (c^2\theta'(\omega - V\theta') - z'^2 V) \\ = \frac{\mu n}{\sqrt{c^2(\omega - V\theta')^2 + V^2 z'^2}} (c^2\omega\theta' - V). \quad (6)$$

Iz prve vrstice smo prešli v drugo z uporabo enačbe (2). Iz zgornje enačbe izrazimo n in ga vstavimo v izraz za f_θ , enačba (5)

$$f_\theta = cT' \frac{V\theta' - \omega}{c^2\omega\theta' - V}. \quad (7)$$

To nesemo v

$$\rho cV^2\theta'' = cT\theta'' + cT'\theta' + f_\theta \quad (8)$$

in dobimo

$$\begin{aligned} (\rho V^2 - T)\theta'' &= T'\theta' + \frac{V\theta' - \omega}{c^2\omega\theta' - V}T' \\ &= \omega T' \frac{c^2\theta'^2 - 1}{c^2\omega\theta' - V}. \end{aligned} \quad (9)$$

Enačbo zapišemo še drugače:

$$\frac{c\omega}{V} \frac{T'}{\rho V^2 - T} = c\theta'' \left[\frac{\frac{c^2\omega\theta' - 1}{V}}{c^2\theta'^2 - 1} \right]. \quad (10)$$

Vpeljemo brezdimenzijsko hitrost $\Omega = c\omega/V$ in novo spremenljivko $\chi = c\theta$, pa dobimo bolj pregleden izraz:

$$\Omega \frac{T'}{\rho V^2 - T} = \chi'' \left[\frac{1 - \Omega\chi'}{1 - \chi'^2} \right]. \quad (11)$$

Količina $\chi' = c\theta'$ je pri drsenju preje po navitku vedno manjša od 1, saj za en navoj preje okoli navitka potrebujemo vsaj $2\pi c$ dolg odsek preje. S kratkim premislekom (in s pomočjo slike 1) se lahko prepričamo, da je odvod χ' povezan s tangentno smerjo preje na površini navitka. Velja kar $\chi' = \cos\phi$. Podobno ugotovimo tudi, da je $z' = \tan\phi$

Enačbo (11) pa znamo integrirati. Leva stran enačbe je odvod funkcije $-\Omega \ln|T - \rho V^2|$, desna stran pa je

$$\text{odvod funkcije, } \frac{\Omega - 1}{2} \ln|1 - \chi'| + \frac{\Omega + 1}{2} \ln|1 + \chi'|$$

v kar se lahko prepričamo, če ta izraz odvajamo po ločni dolžini s . Dobimo torej

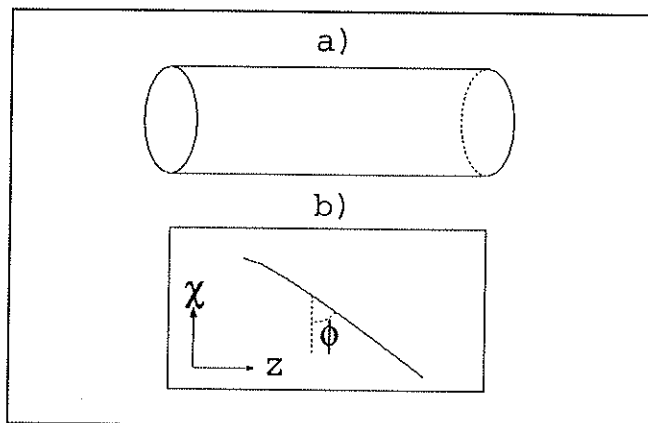
$$-\Omega \ln|T - \rho V^2| = \frac{\Omega - 1}{2} \ln|1 - \chi'| + \frac{\Omega + 1}{2} \ln|1 + \chi'| + \text{konst.} \quad (12)$$

Napetost T je vedno večja od količine ρV^2 (to je dva-kratnik gostote kinetične energije, ki jo ima preja zaradi tega, ker jo vlečemo) [3]. Zgoraj smo že ugotovili, da velja $\chi' < 1$. Zato so vse količine med znaki za absolutno vrednost samo pozitivne in lahko pisanje znakov v nadaljevanju opustimo.

Če dobljen izraz eksponiramo in nekoliko preoblikujemo, dobimo

$$T - \rho V^2 = K \left[(1 - c\theta')^{\frac{1-\Omega}{2\Omega}} (1 + c\theta')^{-\frac{1+\Omega}{2\Omega}} \right], \quad (13)$$

kjer je K integracijska konstanta. Določimo jo tako, da si ogledamo dogajanje v točki odvijanja. Če je kot navijanja enak Φ , potem se pri spremembi ločne dolžine s za $2\pi c/\cos\Phi$ (tedaj se ravno odvije en ovoj preje) kot θ spremeni za 2π .



Slika 1: a) Površino valja prerežemo vzdolž dolgega roba in ga razvijemo, b) Razvita površina je ravnina z osema z in χ . Kot ϕ je naklon preje v ravnini (z, χ) .

Zato je v točki odvijanja odvod θ' enak $\cos\Phi/c$, in sledi $\chi'(Od) = \cos\Phi$. [Kot navijanja preje na navitek, Φ , je po definiciji enak naklonu preje ϕ v ravnini (z, χ) , zato je ta rezultat povsem v skladu z zgoraj zapisano enačbo $\chi' = \cos\phi$.] V tej isti točki je napetost v preji enaka rezidualni napetosti preje na navitku T_{res} . Če obe vrednosti vstavimo v enačbo (13), dobimo

$$T_{res} - \rho V^2 = K \left[(1 - \cos\Phi)^{\frac{1-\Omega}{2\Omega}} (1 + \cos\Phi)^{-\frac{1+\Omega}{2\Omega}} \right]. \quad (14)$$

Enačbo (13) lahko torej zapišemo z naslednjim izrazom:

$$\frac{T - \rho V^2}{T_{res} - \rho V^2} = \left[\left(\frac{1 - c\theta'}{1 - \cos|\Phi|} \right)^{\frac{1-\Omega}{2\Omega}} \left(\frac{1 - c\theta'}{1 + \cos|\Phi|} \right)^{-\frac{1+\Omega}{2\Omega}} \right] \quad (15)$$

Pri paralelnih valjastih navitkih z zaprtim paralelnim navitjem je brezdimenzijska hitrost $\Omega = c\omega/V$ približno enaka 1. Če v enačbo (13) vstavimo $\Omega = 1$, dobimo

$$T - \rho V^2 = \frac{K}{1 + c\theta'}. \quad (16)$$

Do tega rezultata je prišel že Fraser [4], naš izraz (13) pa je bolj splošen. Pri križno navitih navitkih namreč približno velja:

$$\Omega = \frac{\cos\Phi}{1 - \sin\Phi}, \quad (17)$$

kjer je Φ kot navijanja v točki, kjer se preja trenutno odvijata. To pomeni, da pri križnih navitkih brezdimenzijska kotna hitrost ni enaka 1, temveč je večja od 1 pri odvijanju nazaj ($\Phi > 1$) in manjša od 1 pri odvijanju naprej ($\Phi < 1$).

Na odseku preje, ki drsi po navitku in se tare ob spodnje plasti, napetost v preji pade od njene vrednosti v točki dviga do rezidualne napetosti. Pri tem kot ϕ naraste od svoje vrednosti v točki odvijanja do vrednosti Φ v točki dviga. Povezava med tema pojavoma je ravno enačba 15!

Enačbo (6) zapišemo nekoliko drugače:

$$T' = \frac{\mu n}{\sqrt{V^2(\Omega - \cos \phi)^2 + V^2 \tan^2 \phi}} (V\Omega \cos \phi - V)$$

$$= \frac{\mu n}{\sqrt{(\Omega - \cos \phi)^2 + \tan^2 \phi}} (\Omega \cos \phi - 1). \quad (18)$$

Uporabimo približke $\Omega \approx 1$ in $\cos \phi \approx 1 - \frac{\phi^2}{2}$, $\tan \phi \approx \phi$, pa dobimo

$$T' \approx -\mu n \phi / 2. \quad (19)$$

Upadanje napetosti vzdolž preje med drsenjem je sorazmerno s koeficientom trenja, kot smo pričakovali. Večji je koeficient trenja, krajši bo odsek drseče preje. Odvod je sorazmeren tudi s kotom ϕ , zato je upadanje večje v bližini točke dviga, kjer je ϕ velik, manjše pa v bližini točke odvijanja, kjer je pri gostem navitju ϕ skoraj enak nič.

4.0 SKLEP

Pokazali smo, kako poenostavitev enačb drsenja preje po navitku na dvodimenzionalen problem omogoča, da do ključnih ugotovitev pridemo po analitični poti. Videli smo, kako odsek preje, ki drsi po navitku, omogoči padec napetosti v preji na njeno rezidualno vrednost v notranjosti navitka, in kako je to povezano z obliko drseče preje. Bolj podrobne rešitve problema pa lahko dobimo le s pravim numeričnim reševanjem enačb z uporabo strelske metode [3, 4].

Viri

- [1] PRAČEK, S. Drsenje preje po navitku med odvijanjem : 1. del: Izpeljava enačb. *Tekstilec*, 2004, let. 47, šte. 1-2, str. 26-28.
- [2] PRAČEK, S. in JAKŠIĆ, D. Teorija odvijanja preje z navitka - Izpeljava gibalnih enačb. *Tekstilec*, 2002, let. 45, šte. 5-6, str. 119.
- [3] KONG, XM. *Steady state unwinding of yarn from cylindrical packages : theory and experiment : Master Work*. Clemson : Clemson University, 1997.
- [4] FRASER, WB., GHOSH, TK. in BATRA, SK. On unwinding yarn from cylindrical package. *Proceedings of the Royal Society*. Lond. A, 1992, vol. 436, p. 479-498.

Prispelo/Received: 04-2003; sprejeto/accepted: 12-2003