

Drsenje preje po navitku med odvijanjem: 1. del: Izpeljava enačb

Mebanska napetost v preji in nihanje napetosti med odvijanjem preje z mirujočega navitka sta odvisni od hitrosti odvijanja, oblike navitka in vrste navitja, koeficienta zračnega upora in tudi od koeficienta trenja med odvijajočo se prejo in navitkom. Preja navitka ne zapusti v točki odvijanja, temveč najprej drsi po navitku, šele nato pa se dvigne in nadaljuje svojo pot v »balonu«. Da bi lahko simulirali odvijanje preje, smo morali najprej razviti splošno gibalno enačbo gibanja preje v balonu ter upoštevati tudi pojav drsenja preje po navitku. V tem prispevku smo zato torej dodatno dopolnili pogled na odvijanje preje z navitkov tako, da smo iz splošne gibalne enačbe gibanja preje pri odvijanju razvili enačbo drsenja preje po navitku: v enačbo ustavimo namesto sile zračnega upora silo, ki opisuje vpliv podlage na prejo. Drsenje preje po navitku je odvisno od normalne sile podlage in od sile trenja po navitku.

Ključne besede: dinamika preje, trenje med prejo in navitkom, teorija balona, robni pogoji.

Sliding Motion of Yarn on the Package During Unwinding: Part 1: Derivation of equations

Tension in the yarn and its oscillations during the over-end unwinding of yarn from stationary packages depend on the unwinding speed, the shape and the winding type of the package, the air drag coefficient and also the coefficient of friction between the yarn and the package. The yarn doesn't leave the surface of the package immediately at the unwinding point, but it first slides on the surface and then lifts off to form the »balloon«. The problem of simulating the unwinding process was split into two smaller problems: the first task was to describe the motion of yarn in the balloon, the second one to solve the sliding motion.

Key words: dynamics of yarn, friction between yarn and package, balloon theory, boundary conditions.

UDK 677.023.237

1.0 GIBALNA ENAČBA PREJE

Problem drsenja preje po navitku med odvijanjem obravnavamo podobno kot gibanje preje v »balonu« med točko dviga in vodilom, skozi katero vlečemo prejo. Splošno enačbo za gibanje preje smo podrobno utemeljili in izpeljali v enem izmed predhodnih člankov [1]:

$$\begin{aligned} \rho (D^2 \mathbf{r} + 2\boldsymbol{\omega} \times D\mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}) = \\ = \frac{\partial}{\partial s} \left(T \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \right) + \mathbf{f} \end{aligned} \quad (1)$$

Radij vektor \mathbf{r} kaže iz izhodišča v vodilu v izbrano točko na preji; ρ je linearna gostota mase preje; $\boldsymbol{\omega}$ je

vektor kotne hitrosti vrtečega se koordinatnega sistema, v katerem prejo opisujemo, in kaže v smeri osi z ; operator D je operator totalnega časovnega odvoda, ki sledi gibanju izbrane točke znotraj vrtečega se koordinatnega sistema [1], $D = \partial/\partial t|_{r, \theta, z} - V\partial/\partial s$; T je mehanska napetost; \mathbf{f} je linearna gostota zunanijh sil. Pri gibanju preje v balonu je \mathbf{f} gostota sile zračnega upora [2],

$$\mathbf{f} = -\frac{1}{2}c_u\rho d|\mathbf{v}_n|\mathbf{v}_n, \quad (2)$$

kjer je c_u efektivni koeficient zračnega upora, d premer preje, $\mathbf{v}_n = \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{t})\mathbf{t}$ (\mathbf{t} je enotski tangentni vektor na prejo v obravnavani točki) pa je normalna komponenta hitrosti preje.

Pri drsenju preje po navitku pa bo količina f povezana z gostoto sile trenja med prejo in navitkom.

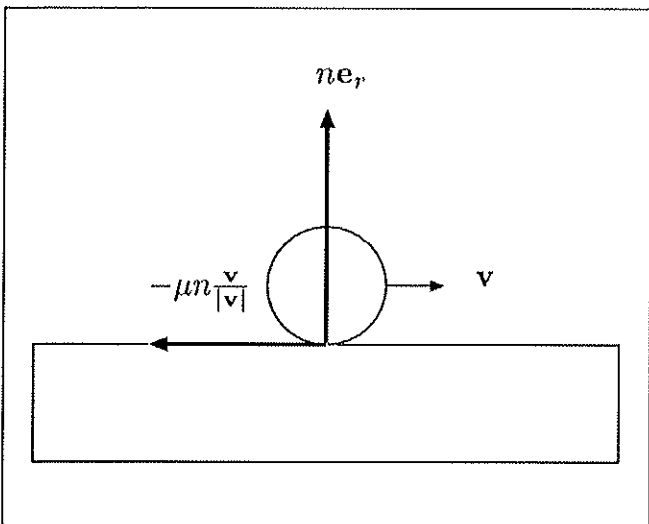
2.0 SILA TRENJA MED PREJO IN NAVITKOM

Na prejo, ki drsi po navitku, preden se dvigne in tvori balon, deluje sila trenja. Preja namreč pritiska na navitek z neko normalno komponento sile (torej pravokotno na površino navitka), ki je vnaprej ne poznamo, temveč jo lahko dobimo šele kot del rešitve. Privzamemo lahko le, da normalna komponenta sile kaže v radialni smeri. Najenostavnejši zakon trenja pravi, da je sila trenja sorazmerna z normalno komponento sile. Sorazmernostni koeficient imenujemo koeficient trenja, ki ga označimo z μ . Sila trenja deluje v nasprotni smeri, kot se preja giblje.

Količina f v enačbi (1) je torej sestavljena iz dveh prispevkov: iz radialne sile, s katero navitek pritiska na prejo (ta je obratna sili, s katero preja pritiska na navitek, v skladu z Newtonovim tretjim zakonom), in iz sile trenja same (slika 1):

$$\mathbf{f} = n\mathbf{e}_r - \mu n \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}. \quad (3)$$

Tu je n gostota normalne komponente sile podlage, \mathbf{e}_r je enotski vektor v radialni smeri, $\mathbf{v}/|\mathbf{v}|$ pa je enotski vektor v smeri hitrosti preje.



Slika 1: Sila trenja med prejo in navitkom

Ko preja drsi po navitku, deluje nanjo normalna sila podlage $n\mathbf{e}_r$, in sila trenja $-\mu n\mathbf{v}/|\mathbf{v}|$.

Zakon trenja je le grob približek. V resnici je koeficient trenja na kompleksen način odvisen od hitrosti drsenja [3], razlikuje pa se tudi od točke do točke na navitku, saj je navitek le redko povsem homogen. Rečemo lahko, da je μ neki izmerljiv povprečni koeficient trenja [4].

3.0 KVAZISTACIONARNI PRIBLIŽEK

Enačba (1) je povsem splošna in opisuje poljubno gibanje preje, tudi če se razmere hitro spreminjajo, kot na primer na robovih navitka. Na robu navitka se kot navijanja naglo spremeni, zato je tedaj gibanje preje na samem navitku in v delu balona blizu točke dviga zelo kompleksno. Na robu lahko pride do različnih neželenih pojavov: preja lahko zdrsne z navitka ali pa se usuje plast. Opis teh prehodnih pojavov je onkraj veljavnosti našega modela, saj bi morali podrobno obravnavati tudi lastnosti preje v naslednji plasti, kot so na primer rezidualne sile preje v navitku [5].

Preja torej zares drsi po navitku le tedaj, ko je točka odvijanja oddaljena od robov. Tedaj pa so razmere kvazistacionarne, kar pomeni, da se v vrtečem se koordinatnem sistemu oblika preje spreminja zelo počasi. Zato lahko v prvem približku vso časovno odvisnost prenesemo na robne pogoje, v gibalni enačbi pa časovno odvisnost zanemarimo [6]:

$$\rho \left(V^2 \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial s^2} - 2V\boldsymbol{\omega} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \right) = \frac{\partial}{\partial s} \left(T \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \right) + \mathbf{f}. \quad (4)$$

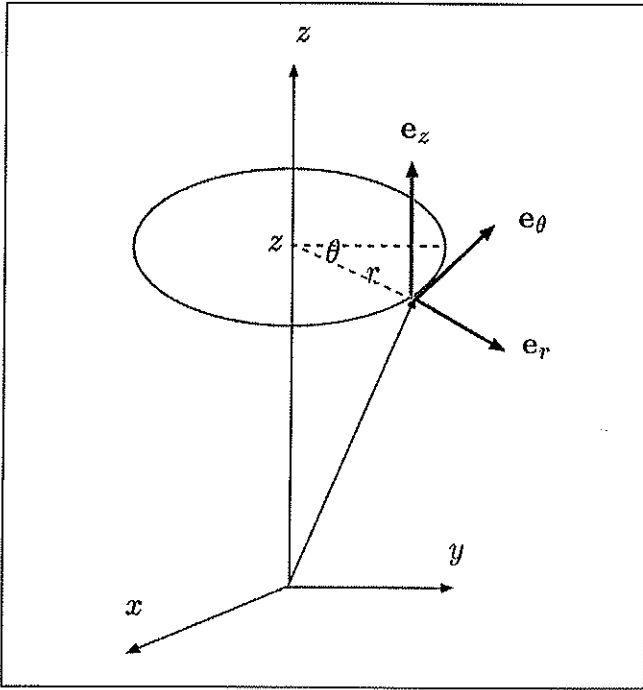
4.0 GIBALNA ENAČBA ZA PREJO NA NAVITKU: POENOSTAVITEV NA DVODIMENZIONALNI PROBLEM

Ko preja drsi po navitku, se giblje po dvodimenzionalni ploskvi. To lahko upoštevamo v enačbi (4) in nalogo poenostavimo na lažje rešljiv dvodimenzionalni problem. Izkáže se, da lahko v primeru drsenja po valjastem navitku nalogo v veliki meri rešimo analitično. Analitične rešitve omogočajo neposreden vpogled v odvisnosti med različnimi količinami, zato bomo privzeli, da ima obravnavani navitek obliko valja, in poiskali to rešitev.

Radialni vektor do točke na površini valjastega navitka zapišemo v obliki (primerjava z enačbo (2) v [1]):

$$\mathbf{r}(s) = c\mathbf{e}_r(\theta(s)) + z(s)\mathbf{e}_z \quad (5)$$

Količina c je konstantna oddaljenost točke \mathbf{r} od osi navitka in je enaka polmeru plasti, ki se pravkar odvijata. Enotski vektor \mathbf{e}_z kaže v smeri osi navitka, enotski vektor \mathbf{e}_r pa v radialni smeri s polarnim kotom $\theta(s)$, slika 2. V izrazu nastopata dve neznani funkciji, $\theta(s)$ in $z(s)$, tretja $[r(s)]$ pa odpade, saj je na površini navitka ves čas konstantna. Gibanje preje smo tako prevedli na dvodimenzionalno gibanje. Zgornji nastavek bomo sedaj upoštevali v (4) in poiskali poenostavljeno gibalno enačbo.



Slika 2: Valjni koordinatni sistem

Prva odvoda radij vektorja po ločni dolžini izračunamo upoštevajoč relaciji (6) iz [1] in dobimo:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'(s) &= c\theta'(s)\mathbf{e}_\theta + z'(s)\mathbf{e}_z \\ \mathbf{r}''(s) &= c\theta''(s)\mathbf{e}_\theta - c[\theta'(s)]^2\mathbf{e}_r + z''(s)\mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (6)$$

kjer s črticami označujemo odvod po ločni dolžini s . Od tod dobimo

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \left(T \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \right) &= \frac{\partial T}{\partial s} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} + T \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial s^2} = \\ &= T' (c\theta'\mathbf{e}_\theta + z'\mathbf{e}_z) + T (c\theta''\mathbf{e}_\theta - c(\theta')^2\mathbf{e}_r + z''\mathbf{e}_z) \\ &= -cT(\theta')^2\mathbf{e}_r + c(T\theta'' + T\theta''')\mathbf{e}_\theta + (T'z' + Tz'')\mathbf{e}_z. \end{aligned}$$

Potrebujemo še enačbi

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' &= -c\omega\theta'(s)\mathbf{e}_r \\ \text{in} \\ \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) &= -\omega^2 c\mathbf{e}_r \end{aligned}$$

ki ju dobimo s preprostim izračunom vektorskih produktov.

Gibalno enačbo (4) sedaj razpišemo po komponentah:

$$(r) \rho(-cV^2(\theta')^2 + 2Vc\omega\theta' - \omega^2c) = -cT(\theta')^2 + f_r \quad (7)$$

$$(\theta) \rho(cV^2\theta'') = cT\theta'' + cT'\theta' + f_\theta \quad (8)$$

$$(z) \rho(V^2z'') = Tz'' + T'z' + f_z \quad (9)$$

Količine f_r , f_θ in f_z so komponente gostote sile podlage na prejo (3). Prva ima preprosto obliko $f_r = n$, drugi dve pa moramo še izračunati. Hitrost preje v

kvazistacionarnem približku je (enačba 8 v [1], kjer upoštevamo, da je $\mathbf{v}_{rel} = 0$):

$$\mathbf{v} = -V\mathbf{t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = c(\omega - V\theta')\mathbf{e}_\theta - z'V\mathbf{e}_z$$

Od tod dobimo enotski vektor v smeri hitrosti:

$$\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{1}{\sqrt{c^2(\omega - V\theta')^2 + z'^2V^2}} [c(\omega - V\theta')\mathbf{e}_\theta - z'V\mathbf{e}_z],$$

nato pa še iskani komponenti gostote sile trenja:

$$\begin{aligned} f_\theta &= -\mu n c (\omega - V\theta') / \sqrt{c^2(\omega - V\theta')^2 + z'^2V^2}, \\ f_z &= \mu n z' V / \sqrt{c^2(\omega - V\theta')^2 + z'^2V^2}. \end{aligned} \quad (10)$$

Enačbe (7) – (9) in (10) so iskane poenostavljene enačbe gibanja. Na prvi pogled so bolj kompleksne v primerjavi z vektorskima enačbama (3) in (4), saj so razpisane po komponentah. Dejansko pa so bolj enostavne: neznane funkcije so θ , z , n_θ , n_z , T , odpravili pa smo r in n_r . V drugem delu članka bomo pokazali, da lahko odpravimo tudi funkcijo T .

5.0 ZAKLJUČEK

Ogledali smo si, kako lahko enačbe drsenja preje po navitku dobimo iz splošne gibalne enačbe preje, če v njo vstavimo namesto sile zračnega upora silo, ki opisuje vpliv podlage na prejo. Ta je sestavljena iz dveh prispevkov: iz normalne sile podlage in iz sile trenja. Opisali smo, kdaj velja kvazistacionarni približek, ki smo ga nato uporabili za poenostavitev enačb gibanja na dvodimenzionalni problem. Analitične rešitve omogočajo vpogled v odvisnost med različnimi količinami.

6.0 VIRI

- [1] PRAČEK, S. in JAKŠIČ, D. Teorija odvijanja preje z navitka – Izpeljava gibalnih enačb. *Tekstilec*, 2002, let. 45, št. 5–6, str. 119–123.
- [2] PRAČEK, S. in JAKŠIČ, D. Teorija odvijanja preje z navitka – Robni pogoji in sila zračnega upora. *Tekstilec*, 2002, let. 45, št. 7–8, str. 175–178.
- [3] STRNAD, J. *Fizika, prvi del: Mehanika, toplota*. Ljubljana : Društvo matematikov, fizikov in astronomov, 1995.
- [4] WU, R., YU, J., RAHN, CD. in GOSWAMI, BC. Measuring Yarn/Package Friction during over–end unwinding. *Textile Research Journal*, 2000, vol. 70, p. 321.
- [5] CLARK, JD., FRASER, WB. in STUMP, DM. Modelling of tension in yarn package unwinding. *J. Eng. Math.*, 2001, vol. 40, p. 59.
- [6] FRASER, WB., GHOSH, TK. in BATRA, SK. On unwinding yarn from cylindrical package. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 1992, vol. 436, p. 479–498.

Prispelo/Received: 04–2003; sprejeto/accepted: 11–2003