dr. **Stanislav Praček**, univ dipl. inž.
red. prof. dr. **Danilo Jakšić**, univ. dipl. inž.
Univerza v Ljubljani, Naravoslovnotehniška fakulteta, Oddelek za tekstilstvo, Snežniška 5, SI-1000 Ljubljana; e-pošta: stane.pracek@ntftex.uni-lj.si; danilo.jaksic@ntftex.uni-lj.si

Izvirni znanstveni članek
Original Scientific Paper

Teorija odvijanja preje z navitka
2. Robni pogoji in sila zračnega upora

Odvijanje preje z navitka je ključnega pomena pri številnih tekstilnih procesih, saj stabilnost odvijanja neposredno vpliva na učinkovitost celotnega tekstilnega procesa in na kakovost končnega izdelka. Pri iskanju optimalne oblike navitka in optimalnega načina odvijanja si lahko pomagamo z izračuni na podlagi teoretičnega modela odvijanja. V prvem delu članka smo izpeljali diferencialne enačbe, ki opisujejo gibanje preje pri procesu odvijanja. V tem članku bomo opisali ustrezne robne pogoje ter zakon zračnega upora, ki v veliki meri določa obliko balona preje med odvijanjem. Tako bomo dobili model odvijanja preje, ki je dobro matematično definiran, in ki se ga lahko lotimo z orodji numerične matematike. Na ta način lahko simuliramo odvijanje z navitka poljubne konstrukcije in poiščemo optimalno rešitev.

Ključne besede: *odvijanje preje, navitki, teorija balonov, napetost v preji*

Theory of Yarn Unwinding off a Package
2. Boundary Conditions and the Air Drag Force

Yarn unwinding off a package plays an essential role in many textile processes. Stability of yarn unwinding has a direct influence upon the efficiency of the entire textile process and upon the quality of a final product. In pursuit of an optimal design of a package and an optimal unwinding process, the calculations based on a theoretical model of unwinding can be of great help. In the first part of the article a system of differential equations that describe unwinding of the yarn was derived. This article is devoted to the derivation of suitable boundary conditions and to the law of the air drag that considerably effects the form of the balloon. In this way a mathematically well defined model of yarn unwinding will be obtained which could be solved by using the tools of numerical mathematics. Yarn unwinding off an optionally designed package can be simulated and this knowledge used in order to find an optimal design of packages.

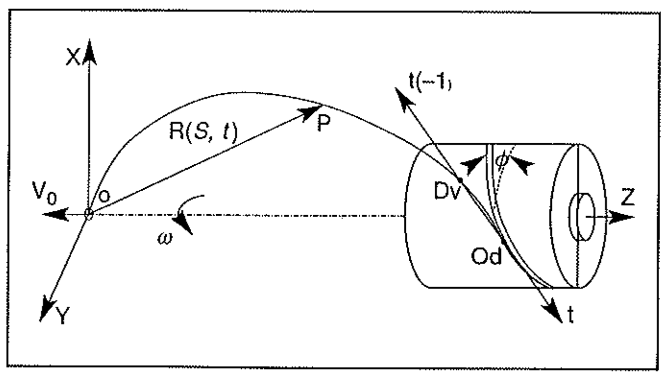
Keywords: *yarn unwinding, packages, balloon theory, yarn tension*

UDK 677.023

1.0 Robni pogoji na vodilcu

Na sliki 1 je prikazana postavitev koordinatnega sistema ter lege točk **O**, **Dv** in **Od**, v katerih bomo poiskali robne pogoje pri odvijanju preje.

Prejo odvijamo s hitrostjo V skozi vodilec O, ki je tudi izhodišče koordinatnega sistema. Točka **Dv** je točka dviga, to je točka, v kateri preja zapusti površino navitka in naprej tvori balon. Točka **Od** je točka, kjer se preja začne odvijati in drseti po navitku. Kot ϕ je kot navijanja preje na cilindrični navitek. Vektor **t** je tangentni vektor na prejo v točki odvijanja.



Slika 1: Odvijanje preje s cilindričnega navitka

Robni pogoj na vodilcu v izhodišču koordinatnega sistema O, pri ločni dolžini s = 0 je:

$$\mathbf{r}(s = 0, t) = 0, \tag{1}$$

ali razpisano po komponentah

$$r(s = 0, t) = 0,\ z(s = 0, t) = 0. \tag{2}$$

Robni pogoj za θ (s = 0,t) s pogojem **r** (s = 0,t) = 0 ni določen, saj poljuben θ (s = 0,t) zadosti tej enačbi. V kvazistacionarnem stanju, ko spremenljivke r, θ, z in T niso časovno odvisne, si lahko robni pogoj za θ (s = 0) poljubno izberemo, na primer kar

$$\theta(s = 0) = 0. \tag{3}$$

2.0 Robni pogoji v točki, kjer se preja dvigne z navitka in tvori balon

V točki, kjer se preja dvigne z navitka in tvori balon (točka **Dv** na sliki 1), mora rešitev zadoščati trem pogojem:

1. Preja ne sme biti pretrgana, zato mora biti krajevni vektor **r** (s,t) zvezna funkcija.
2. Preja ne sme biti prelomljena, zato mora biti zvezen tangentni vektor na vrvico $\partial\mathbf{r}/\partial s$. Ta pogoj moramo utemeljiti s fizikalnimi argumenti. V resnici gre za privzetek, da med prejo in navitkom v točki **Dv** ni točkaste kohezivne sile, ki bi prejo lepila na navitek [1].
3. Hitrost **v** mora biti enaka tik pred in tik za točko, kjer se preja dvigne. Če to ne bi bilo res, bi se preja v naslednjem trenutku strgala, kar je v nasprotju s prvim pogojem.

V prvem delu članka (Tekstilec, 5–6/2002, str. 119–123) smo pokazali, da lahko hitrost v zapišemo kot

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} - V\,\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \tag{4}$$

Ker sta hitrost **v** in tangentni vektor $\partial\mathbf{r}/\partial s$ zvezna v točki dviga, od tod sledi, da je zvezen tudi vektor $\partial\mathbf{r}/\partial t$. Tako dobimo pogoje o zveznosti:

$$r(s_{Dv}^-, t) = r(s_{Dv}^+, t)\ \partial r(s_{Dv}^-, t)/\partial t =$$
$$= \partial r(s_{Dv}^+, t)/\partial t\ \partial r(s_{Dv}^-, t)/\partial s = \partial r(s_{Dv}^+, t)/\partial s$$

$$\theta(s_{Dv}^-, t) = \theta(s_{Dv}^+, t)\ \partial\theta(s_{Dv}^-, t)/\partial t =$$
$$= \partial\theta(s_{Dv}^+, t)/\partial t\ \partial\theta(s_{Dv}^-, t)/\partial s = \partial\theta(s_{Dv}^+, t)/\partial s$$

$$z(s_{Dv}^-, t) = z(s_{Dv}^+, t)\ \partial z(s_{Dv}^-, t)/\partial t =$$
$$= \partial z(s_{Dv}^+, t)/\partial t\ \partial z(s_{Dv}^-, t)/\partial s = \partial z(s_{Dv}^+, t)/\partial s$$

Tu je s_{Dv}^- ločna dolžina tik pred točko dviga, s_{Dv}^+ pa ločna dolžina tik za točko dviga.

Za prejo v plasti, ki se trenutno odvija, velja

$$\mathbf{r} = c\mathbf{e}_r + z\mathbf{e}_z, \tag{5}$$

kjer je c polmer navitka v dani točki. Količina c se pri odvijanju s cilindričnih navitkov zelo počasi spreminja v primerjavi z drugimi, zato lahko v prvem približku privzamemo, da je konstantna, $\partial c/\partial s = 0$ in $\partial c/\partial t = 0$.
Tako dobimo dodatna pogoja:

$$\partial r(s_{Dv}^-, t)\partial t = 0,\ \partial r(s_{Dv}^-, t)/\partial s = 0. \tag{6}$$

Te pogoje bomo potrebovali, če bomo želeli zlepiti rešitev v balonu in rešitev na navitku.

3.0 Robni pogoji v točki, kjer preja začne drseti po navitku

V neki točki na navitku preja začne drseti po navitku. To točko imenujemo točka začetka odvijanja, **Od**. Tangentni vektor v tej točki mora ustrezati kotu navijanja ϕ, kar zapišemo kot

$$\mathbf{t} = \frac{\partial \mathbf{r}(s_{Od})}{\partial s} = \cos\phi\,\mathbf{e}_\theta + \sin\phi\,\mathbf{e}_z. \tag{7}$$

V prvem delu članka smo izpeljali izraz

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}\,\mathbf{e}_r + r\,\frac{\partial \theta}{\partial s}\,\mathbf{e}_\theta + \frac{\partial z}{\partial s}\,\mathbf{e}_z. \tag{8}$$

Na navitku velja r = c, $\partial r/\partial s = 0$, tako dobimo

$$\frac{\partial \mathbf{r}(s_{Od})}{\partial s} = c\,\frac{\partial \theta}{\partial s}\,\mathbf{e}_\theta + \frac{\partial z}{\partial s}\,\mathbf{e}_z. \tag{9}$$

Če izenačimo izraza (7) in (9), dobimo dva robna pogoja

$$c\,\frac{\partial \theta(s_{Od})}{\partial s} = \cos\phi, \qquad \frac{\partial z(s_{Od})}{\partial s} = \sin\phi. \tag{10}$$

4.0 Sila zračnega upora

V prvem delu članka smo izpeljali diferencialno enačbo, ki opisuje gibanje preje v balonu. V enačbi se pojavlja člen **f**, to je linearna gostota sile zračnega upora. Če bi radi numerično izračunali obliko balona, moramo poiskati zapis te sile. Pri gibanju teles skozi tekočine ali skozi zrak lahko silo upora opišemo s fenomenološkima zakonoma, v katerih hitrost gibanja nastopa linearno ali pa kvadratično [2]. O izbiri primernega zakona uporabimo merila, ki veljajo za Reynoldsevo število

$$Re = \frac{l\rho v}{\eta}, \tag{11}$$

kjer je l značilna linearna razsežnost v čelnem preseku (v našem primeru je to premer preje), ρ je gostota zraka, v je normalna komponenta hitrosti preje in η dinamična viskoznost zraka. Približno lahko rečemo, da velja linearni zakon upora na območju Re < 0.5 in kvadratni na območju Re > 1000. V vmesnem območju moramo uporabiti tabele. Poleg tega moramo paziti na to, da kvadratni zakon ne velja pri poljubno veliki hitrosti [2]. Veljavnost je omejena z zvočno hitrostjo. Pri hitrosti, ki meri približno polovico zvočne hitrosti (to je okoli 150 m/s = 9000 m/min), preneha veljati kvadratni zakon. Ker nas zanimajo hitrosti odvijanja do 2000 m/min, s tem ne bomo imeli težav.

Ocenimo sedaj Reynoldsovo število za tipične parametre pri odvijanju preje.

Parameter	Vrednost
gostota zraka, ρ	1,22 kg/m^3
premer preje, l = d	10^{-4} m
dinamična viskoznost zraka, η	$1,7 \cdot 10^{-5}$ kgm/s
hitrost odvijanja, V	1000 – 2000 m/min

Normalno komponento hitrosti preje v_n ocenimo kar s hitrostjo odvijanja V.

Dobimo naslednje vrednosti:

Hitrost odvijanja	Re	c_u
1000 m/min	7100	0,95
1500 m/min	10700	1,05
2000 m/min	14000	1,1

Pri teh hitrostih je uporaba kvadratnega zakona upora povsem upravičena. Efektivne koeficiente upora c_u smo prebrali iz tabel [3]. Če bi želeli biti bolj natančni, bi morali v vsaki točki uporabiti koeficient c_u, ki ustreza normalni komponenti dejanske hitrosti v tisti točki. Lahko pa uporabimo približek in računamo ves čas s koeficientom upora, izračunanim pri hitrosti odvijanja V, kot je zapisano zgoraj.

Zakon upora se potem zapiše [2]:

$$F = \frac{1}{2} c_u \rho v_n^2 S, \tag{12}$$

kjer je c_u zgoraj opisani efektivni koeficient upora, ρ je gostota zraka, v normalna komponenta hitrosti in S čelni presek telesa. Če obravnavamo majhen odsek preje z dolžino δs, je čelni presek $d\delta s$, kjer je d premer preje. Linearna gostota sile $f = \delta F/\delta s$ je potem

$$f = \frac{1}{2} c_u \rho v_n^2 d. \tag{13}$$

Vpeljemo okrajšavo $D_n = \frac{1}{2} c_u \rho d$, in upoštevamo, da sila upora deluje v obratni smeri kot normalna komponenta hitrosti. V vektorski obliki lahko sedaj zapišemo zakon upora kot

$$\mathbf{f} = - D_n \, |\mathbf{v}_n| \, \mathbf{v}_n \, . \tag{14}$$

Normalno komponento hitrosti dobimo, če od celotne hitrosti odštejemo tangentno komponento, to je $\mathbf{t}(\mathbf{t} \cdot \mathbf{v})$. Tangentni vektor lahko zapišemo kot $\mathbf{t} = \partial\mathbf{r}/\partial s$, in dobimo

$$\mathbf{v}_n = \mathbf{v} - \left(\mathbf{v} \, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}\right) \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}. \tag{15}$$

Z uporabo vektorske identitete $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ lahko zgornji izraz poenostavimo

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_n &= \mathbf{v}\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}\right) - \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}\left(\mathbf{v} \, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}\right) = \\ &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \times \left(\mathbf{v} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}\right) \end{aligned} \tag{16}$$

Tu smo uporabili pogoj o nerazteznosti vrvice iz prvega dela članka. Hitrost $\mathbf{v}$ v zgornji enačbi pa lahko zapišemo kot

$$\mathbf{v} = D\mathbf{r} + \omega \times \mathbf{r}. \tag{17}$$

Ocenimo sedaj jakost sile zračnega upora. Pri hitrosti odvijanja V = 2000 m/min dobimo približno

$$\begin{aligned} f_u &= \frac{1}{2} c_u \rho v_n^2 d. \\ &\sim 0,5 \cdot 1.3 \cdot 1.22 \cdot (2000/60)^2 \cdot 10^{-4} \text{ N/m} \\ &\sim 0,1 \text{ N/m} \end{aligned} \tag{18}$$

Tipične natezne napetosti pa so okoli [4]

$$\begin{aligned} T &\sim 10 \rho_l V^2 \\ &\sim 10 \cdot 27,3 \cdot 10^{-6} \, (2000/60)^2 \\ &\sim 0,3 \text{ N} \end{aligned} \tag{19}$$

V računu smo uporabili vrednosti $\rho_l = 27,3$ tex. Sila zračnega upora je torej istega velikostnega reda kot napetost, kar pomeni, da je zračni upor ključnega pomena za obliko balona in napetost preje v balonu.

Ocenimo lahko tudi silo težnosti, ki prav tako deluje na prejo. Za gostoto težnostne sile velja $f_g = \rho g$, kjer je $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ težnostni pospešek. Dobimo

$$f_g \sim 10^{-4} \text{N/m}, \tag{20}$$

kar je zanemarljivo malo v primerjavi s silo zračnega upora. Zato pri teoretičnih obravnavah odvijanja preje silo težnosti preprosto zanemarimo.

5.0 Zaključek

Izpeljali smo sistem diferencialnih enačb, ki opisuje gibanje preje v vrtečem se cilindričnem koordinatnem sistemu. Enačbe v tej obliki so zelo prikladne za obravnavo odvijanja preje z navitka pri različnih tekstilnih procesih. To je prva podrobna izpeljava v literaturi. Dobljen sistem enačb je povsem splošen. Upoštevali smo tudi sistemsko silo, ki se pojavi v vrtečih se sistemih, katerih kotna hitrost se s časom spreminja. V literaturi najdemo le poenostavljene enačbe, v katerih je ta sistemska sila zanemarjena brez utemeljitve. Ker imamo štiri neznanke: prostorsko krivuljo $\mathbf{r}(s,t)$ in napetost $T(s,t)$, ter štiri enačbe: enačbo gibanja preje (20, prvi del) in pogoj za nerazteznost (24, prvi del), je problem dobro matematično določen. Izpeljali smo tudi ustrezne robne pogoje in s tem dobili popoln matematični opis odvijanja preje, s katerim bi lahko simulirali odvijanje s poljubno oblikovanega navitka. Tako bi lahko poiskali optimalen način izdelave navitkov, ki bi omogočil doseči čim večje hitrosti odvijanja, tudi do 2000 m/min.

Viri

[1] XIANGMING, K. *Steady state unwinding of yarn from cylindrical packages : Theory and experiment.* PhD thesis, Clemson University, 1997.

[2] STRNAD, J. *Fizika, prvi del : Mehanika, toplota.* Društvo matematikov, fizikov in astronomov, 1995.

[3] ROBERSON, JA. in CROWE, CT. *Engineering fluid dynamics. 2nd edition.* Boston : Houghton Mifflin Company, 1980.

[4] FRASER, WB., GHOSH, TK. in BATRA, SK. On unwinding yarn from cylindrical package. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 1992, vol. 436, p. 479–498.

Prispelo/Received: 11-2001; sprejeto/accepted: 04-2002