

Dinamika gubanja tkanin

Obnašanje materialov pri gubanju je tema obsežnih raziskav že od leta 1890. V zadnjem obdobju je teorija tankih lupin posplošila analizo z upoštevanjem zapletenih robnih pogojev. Vendar pa so aproksimacije in predpostavke, ki predstavljajo osnovo oblikovanja modelov, neprimerne pri tekstilnih materialih. Majhne obremenitve tekstilnih materialov povzročajo velike napetosti in raztezke, tako da so deformacije nelinearne. V prispevku je opisan razvoj nelinearnega matematičnega modela za probleme gubanja s predpostavkami, ki so primerne za obnašanje tkanin. Rezultati modela so dobljeni natančno z numeričnimi matematičnimi metodami. Uporabljene nelinearne diferencialne enačbe so posplošene v posebno obliko nelinearne enačbe, ki je v celoti integrabilna in analitično rešljiva. Na ta način je dobljena dinamična rešitev za tridimenzionalno gubanje tkanin. Te analitične rešitve so uporabne pri vseh pogojih in niso podvržene težavam pri računanju povezanih z iskanjem numeričnih rešitev za visoko nelinearne probleme. Uporaba navedenega analitičnega pristopa pri raziskavah konstrukcije in dinamike tkanin nam predstavlja učinkovito orodje za opis in reševanje mnogih znanih problemov v tekstilni in oblačilni tehnologiji.

Ključne besede: gubanje tkanin, analitične rešitve, Bäcklundove matematične pretvorbe, Klein-Gordonova enačba, nelinearna dinamika tkanine, tridimenzionalno gubanje tkanine

The Dynamics of Fabric Drape

The buckling behaviour of engineering materials has been researched extensively since the 1890's and more recently; thin shell theory has generalised the analysis to include complicated boundary condition. However, the approximations and assumptions which form the basis of engineering models make them inappropriate for textile materials. Very small stresses on textile materials cause extremely large strains so that the deformations are highly nonlinear. In this paper, we develop a nonlinear mathematical methods. In the final section, the nonlinear differential equations used are generalised into a nonlinear evolution equation which is completely integrable and thus solved analytically obtaining dynamical solution for three-dimensional fabric drape. These analytical solutions are applicable under all conditions and are not subject to computational difficulties associated with finding numerical solutions for highly nonlinear problems. The use of this analytical approach to fabric mechanics and dynamics provides us with a very powerful tool to formulate and solve many long-standing problems in fabric and clothing technology.

Keywords: fabric drape, analytical solutions, Bäcklund transformations, Klein-Gordon equation, nonlinear dynamics, three-dimensional fabric drape

1.0 UVOD

Tekstilne tkanine imajo razmeroma dobre lastnosti oblikovanja in gubanja. Danes vemo, da pride do kompleksnih tridimenzijskih deformacij zaradi prav posebne kombinacije osnovnih mehanskih lastnosti tkanine,

kot je obnašanje tkanine pri raztezanju, striženju, upogibanju in obremenjevanju. Vendar pa so prav te lastnosti pogosto vzrok dobro znanih problemov nabiranja, gubanja in mečkanja gotovih oblačil. Bolj ko širimo izbor tkanin in področje obdelave tekstilij ter prehajamo na izdelavo udobnih oblačil za vsak dan iz vse

tanjših in lažjih tkanin, večji in bolj pereči so problemi gubanja, nabiranja in mečkanja tkanine.

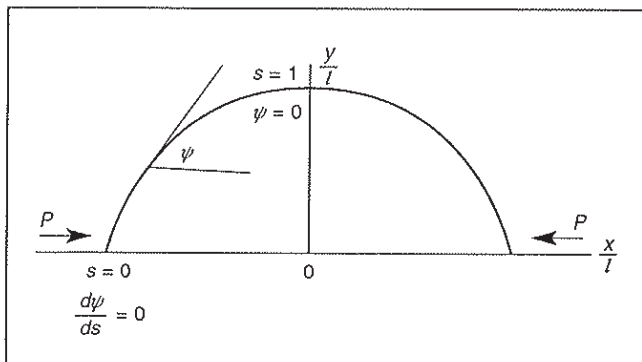
Deformacije tekstilnih materialov zaradi nabiranja, gubanja in mečkanja lahko prikažemo z matematičnim modelom, pri čemer upoštevamo odziv tkanine z veliko napetostjo in raztežkom na majhno obremenitev pri ustreznih robnih pogojih. V nekaterih primerih, zlasti ko gre za gubanje tkanine, moramo upoštevati tudi maso tkanine. Le-ta je pomembna tudi v nekaterih primerih deformacijskega povratka, na primer pri izravnavi zmečkane tkanine. Razen tega je treba izoblikovati splošen model teh deformacij ob upoštevanju mehanizmov neelastičnosti reologije tkanine, namreč viskoelastičnosti vlakna in trenja med vlakni. Ti mehanizmi so namreč zelo pomembni tako za nastanek nabiranja, nabranosti in zmečkanosti tkanine kot za njen povratek. Razlike med temi vrstami deformacij so pogosto bolj stvar dejanskega stanja, pogojev v okolju in uporabnih robnih pogojev kot pa osnovnih mehanizmov deformiranja tkanine.

2.0 NELINEARNI MATEMATIČNI MODEL NABIRANJA IN GUBANJA TKANINE

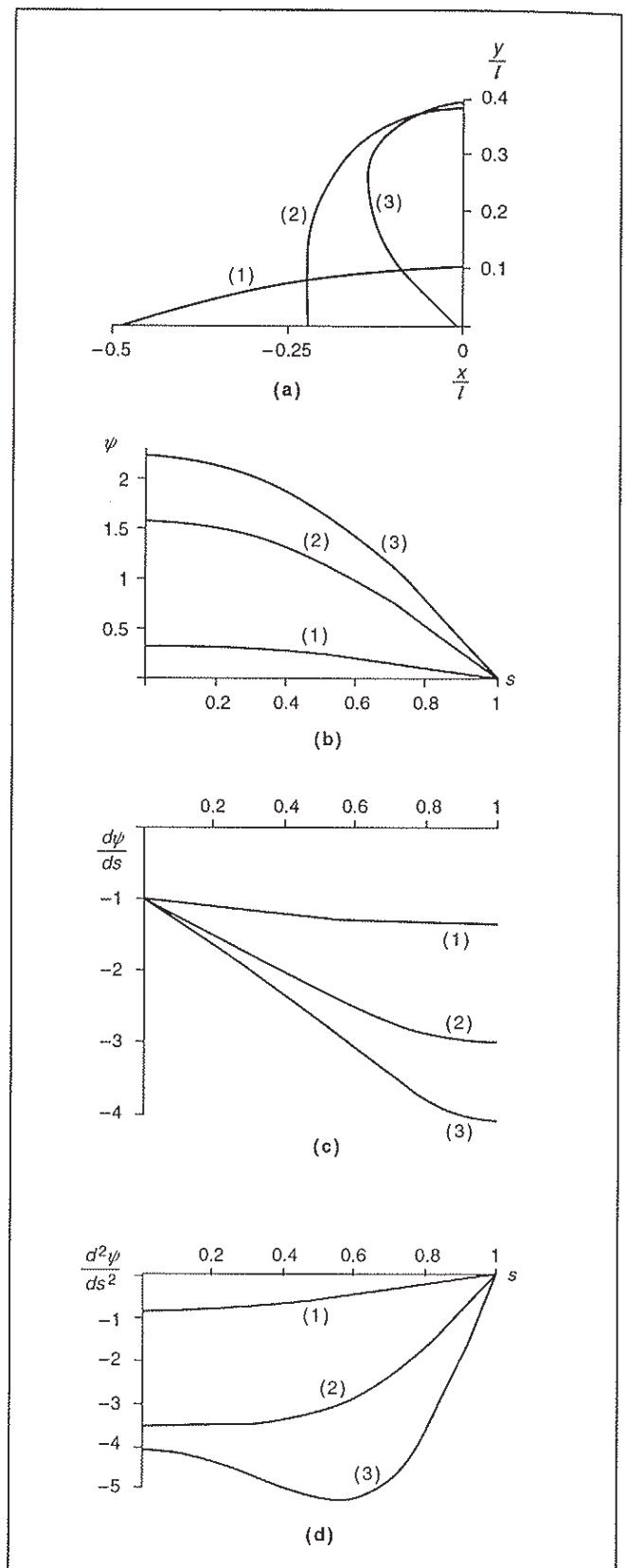
V tem poglavju izhajamo iz predpostavke, da se tkanina obnaša na linearen elastičen način (to pomeni, da je upogibni moment linearna funkcija ukrivljenosti tkanine). Mehanski model nabiranja in gubanja elastičnih materialov lahko izpeljemo z izenačitvijo upogibnih momentov tkanine in izrazimo kot nelinearno diferencialno enačbo:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial s^2} = \frac{-Pl^2}{B} \sin \psi - \frac{wl^3}{B} s \cos \psi \quad (1a)$$

kjer sta vhodna parametra tkanine P/B , sila nabiranja na enoto upogibne trdnosti tkanine in B/w , upogibna trdnost tkanine na enoto mase, ki je enaka kubi upogibne dolžine tkanine (kot je to vpeljal Peirce [1]). Ta vhodna parametra sta normalizirana glede na dolžino tkanine l . Odvisna spremenljivka s je normalizirana



Slika 1: Parametri in robni pogoji, uporabljeni za mehaniki model nabiranja tkanine



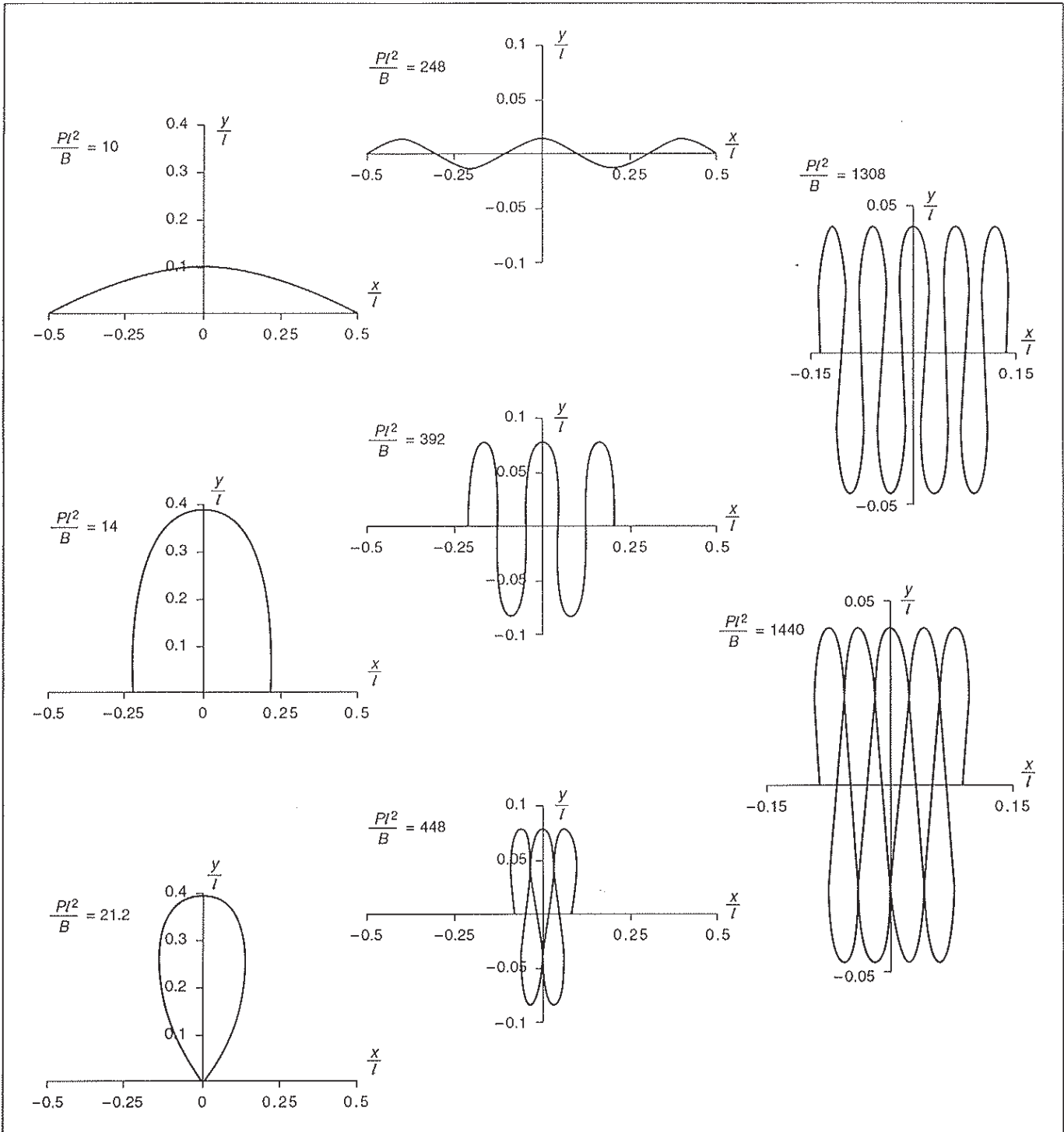
Slika 2: Numerično izračunana izhodna vrednost modela gubanja elastične tkanine, opisanega z enačbo (1), izražena kot: a) profili tkanine; b) dejanska izhodna vrednost, kot tangente na horizontalo ψ kot funkcija s vzdolž krivulje; c) ukrivljenost $d^2\psi/ds^2$ in d) sprememba ukrivljenosti $d^2\psi/ds^2$ za levo polovico nabrane tkanine za vhodne vrednosti: (1) $Pl^2/B = 10$, (2) $Pl^2/B = 14$ in (3) $Pl^2/B = 21,2$

razdalja po profilu nabrane tkanine. Spremenljivka ψ je kot med tangento in horizontalo oziroma osjo x/l po profilu nabrane tkanine. Ti spremenljivki sta prikazani na sliki 1.

Robni pogoji za eno polovico profila nabrane tkanine (druga polovica je simetrična prvi polovici) so: pri $s = 0$ (točka upogiba), $d\psi/ds = 0$ in v točki največje ukrivljenosti, $s = 1$ in $\psi = 0$, l pa je dolžina nabrane tkanine, ki je enaka dvakratni dolžini tkanine od $s = 0$

do $s = 1$. Diferencialno enačbo (1a) lahko sedaj rešimo numerično z matematičnim izračunom z zanemarljivo majhnimi napakami:

Prikladno je, če vse parametre modela normaliziramo glede na dolžino l nabrane tkanine, tako da so vsi vhodni in izhodni parametri tkanine in spremenljivke brez dimenzij. Na ta način postane model splošno uporaben za vse vrste problemov nabiranja, gubanja in mečkanja tkanine pri ustreznih robnih pogojih. Na pri-



Slika 3: Numerično izračunani profili tkanine, ki opisujejo izhodno vrednost modela nabiranja enačbe (1a), ko vhodna vrednost Pl^2/B raste: način nabiranja (1,0) v prvem stolpcu, način nabiranja (3,2) v drugem stolpcu in način nabiranja (5,4) v tretjem stolpcu.

mer povečanje vrednosti vhodnega parametra Pl^2/B , ki ga imamo za »normalizirano silo nabiranja«, bi pri dejanskem problemu nabiranja pomenilo povečanje bodisi dejanske sile nabiranja P , bodisi kvadrata dolžine profila nabrane tkanine l , oziroma alternativno zmanjšanje upogibne trdnosti tkanine B ali pa kakršnokoli sorazmerno kombinacijo teh sprememb. Pričakovali bi, da je profil ukrivljene tkanine l pri mečkanju tkanine majhen, pri gubanju tkanine večji, pri nabiranju pa nekje vmes.

Izračunana izhodna vrednost tega modela je ψ kot funkcija s , ki jo lahko izrazimo kot profil tkanine. Slika 2 prikazuje izračunane rezultate modela nabiranja tkanine z uporabo enačbe (1a) za levo polovico nabrane tkanine (desna je simetrična glede na levo) na osnovi predpostavke, da je masa tkanine nič ($w = 0$), za vhodne vrednosti $Pl^2/B = 10, 14, 21,2$. Slika 2(a) prikazuje dejanske profile nabrane tkanine, ko so osi normalizirane glede na dolžino tkanine l . Slika 2(b) prikazuje izhodne vrednosti modela: kote tangente na horizontalo ob tkanini, $\psi(s)$. Slika 2(c) prikazuje ukrivljenost, $d\psi/ds$ vzdolž tkanine, ki ponazarja upogibne momente, ko jih pomnožimo z upogibno trdnostjo tkanine B . Kot je prikazano na sliki, upogibni momenti naraščajo z normalizirano silo nabiranja tkanine Pl^2/B . Slika 2(d) prikazuje spremembo ukrivljenosti $d^2\psi/ds^2$ vzdolž tkanine. Ta zadnji parameter je najbolj občutljiv na spremembo vhodnih vrednosti, zatorej se sprememba v obliki profilov nabrane tkanine jasno odraža na diagramu $d^2\psi/ds^2$.

2.1 Oblike nabiranja

S tem ko normalizirana vhodna vrednost Pl^2/B za ta model nabiranja tkanine raste, mora rasti bodisi sila nabiranja na enoto upogibne trdnosti tkanine P/B bodisi dolžina tkanine, l , ki se nabira. Ko postane vrednost Pl^2/B zelo velika, pride do višjih kompleksnih oblik nabiranja, kakršne prikazuje slika 3. Zelo verjetno je, da bo do takih višjih oblik nabiranja prišlo pri dolgih, zelo elastičnih tkaninah.

Diagram levo zgoraj na sliki 3 prikazuje tkanino, katere vrednost Pl^2/B je ravno tolikšna, da se začne tkanina nabirati ($Pl^2/B > 9,87$). Prvi stolpec na sliki 3 prikazuje enostavno standardno (1,0) obliko nabiranja. Pri večjih normaliziranih silah nabiranja se profil tkanine »boči«, ko se konca tkanine približujeta in nazadnje dotakneta. Sledi del površine, na kateri tkanina ni nabrana $24 < Pl^2/B < 247$, za njo pa pride do še bolj kompleksne (3,2) oblike nabiranja, ki je prikazana v drugem stolpcu slike 3. Profil tkanine dobiva obliko »vijugaste reke«, dokler se stranici tkanine ne dotakneta. Po še enem delu ravne površine $452 < Pl^2/B < 1308$, v katerem tkanina ni nabrana, se profil nabrane tkanine razvije v (5,4) obliko nabiranja, ki jo prikazuje tretji stolpec slike 3. Ko normalizirana sila nabiranja Pl^2/B še naprej raste,

nastajajo še bolj kompleksne oblike nabiranja, na primer oblike (7,6), (9,8), (11,10) ..., ki pa imajo vedno vmes površino, na kateri se tkanina ne nabira.

3.0 NELINEARNA DINAMIKA TKANINE

V zadnjem času raziskave nelinearne dinamike zelo hitro napredujejo, še zlasti na področju fizike in tehnike. Omenimo le oceanografijo, ultrakratke impulze v elektronskih komunikacijah, ki uporabljajo optična vlakna, razširjanje kristalne dislokacije in prenos energije v kompleksnih bioloških sistemih. Matematična analiza teh problemov ima veliko skupnega z mehanskimi in dinamičnimi pojavi, ki so povezani z nabiranjem, gubanjem, mečkanjem in podobnimi lastnostmi tkanine.

Matematični model bomo izoblikovali na tak način, da bo lahko napovedal natančno obliko nabrane tkanine v treh dimenzijah. Da bi to lahko naredili, bi bilo veliko bolj enostavno, če bi nelinearno diferencialno enačbo (1a) razširili z dveh na tri dimenzije in jo analitično rešili, kot pa, če bi se lotili numeričnega izračunavanja, tako kot smo to storili v prejšnjem poglavju. Numerično izračunavanje rešitev nelinearnih diferencialnih enačb je namreč lahko izjemno zamudno in dolgočasno, še posebej če gre za iteracije (ponavljanja), na primer pri trenju med vlakni v tkanini. Razen tega rezultat numeričnega izračuna ni vedno stabilen, ko rešitve postanejo kaotične zaradi specifičnih vrednosti vhodnih parametrov. Takim problemom bi se popolnoma izognili, če bi našli resnično analitične rešitve za enačbo (1a), saj bi bile le-te splošno uporabne in bi se nanašale neposredno na mehanske lastnosti tkanine.

V prejšnjem poglavju smo z numeričnim izračunom izdelali model deformacij nabiranja in gubanja tkanine. Predpostavimo, da je tridimenzijsko gubanje tkanine podobno obnašanju toka v nelinearni dinamiki tekočine. Na isti način kot nastane v vodi dvodimenzijski val in se širi po površini, se deformira tudi del tkanine (upogne, nabere, skrči ali raztegne) in ta deformacija potuje nit za nitjo po površini in prehaja v tridimenzijsko obliko gubanja.

V dvajsetih letih tega stoletja sta Klein in Gordon izdelala relativistično enačbo za nabit delček v elektromagnetnem polju z uporabo nedavno odkritih idej kvantne teorije. Klein-Gordonova enačba je matematična posplošitev nelinearne diferencialne enačbe (1a) gubanja tkanine. Klein-Gordonova družina enačb se ne spremeni z Lorentzovo pretvorbo, kar pomeni, da je možno, ko je rešitev enkrat znana, dobiti neskončno število drugih rešitev s koordinatnimi pretvorbami. Prav poseben član Klein-Gordonove družine enačb, t.i. »sine-Gordonova« enačba, se reducira v:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \sin \psi = 0 \quad (2a)$$

Enačbe v Klein-Gordonovi družini enačb (vključno z enačbo (1a)) lahko dobimo iz te enačbe s koordinatnimi pretvorbami. Sine-Gordonovo enačbo so uporabili tudi pri mehanskih modelih, pri prenašanju magnetnega toka v velikem Josephsonovem spoju za superprevodnike, prenašanju ultrakratkih optičnih impulzov v optičnih vlaknih in v enotni teoriji elementarnih delcev.

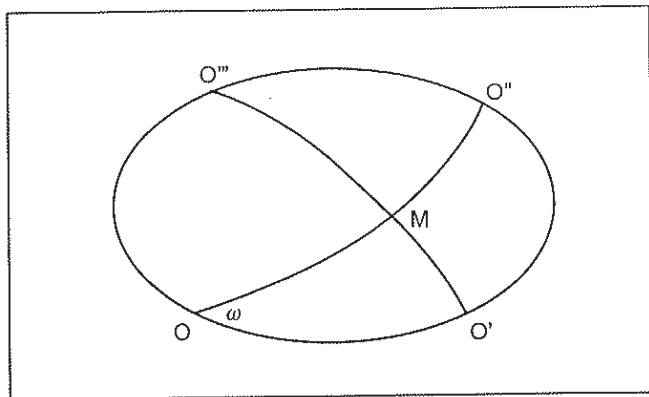
Sine-Gordonova enačba je veljala za nerešljivo vse do razvoja matematičnih Bäcklundovih pretvorb (*Bäcklund Transformations*) v teoriji osamljenega ali posamičnega vala (*solitary wave theory*). Danes vemo, da je ta enačba nelinearna diferencialna enačba, ki jo je mogoče integrirati, kar pomeni, da lahko dobimo prave analitične rešitve, ki niso kaotične, za katerikoli razpon spremenljivk x in t . Tem rešitvam pravimo rešitve osamljenega vala ali posamičnega vala, ki jih lahko analitično opišemo in iz ene rešitve dobimo neskončno število drugih rešitev z uporabo Bäcklundovih pretvorb (popolnoma algebraičen postopek).

Bäcklundove pretvorbe so posplošitve površin konstantno negativne ukrivljenosti. (Ustrezno matematično razlago najdemo pod [2].) Te enačbe pretvarjajo navidezno krogelno površino v drugo površino enake celotne ukrivljenosti. Na obeh površinah se linije ukrivljenosti ujemajo, črta ustreznih točk je tangenta v teh točkah na površino in ima konstantno dolžino. Ravnine tangent se v ustreznih točkah srečajo pod konstantnim kotom.

Vzemimo, da je w suplementarni kot med sekajočima se zemeljskima (geodetskima) črtama, tako da sta naši koordinati polarni zemeljski (geodetski) črti, kot prikazuje slika 4. Parametra α in β predstavljata asimptotični črti. Ko poznamo pretvorbe dane navidezne krogelne površine, postane Gaussova enačba taka:

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha \partial \beta} = \sin \omega \cos \omega \quad (2b)$$

Le-ta je znana tudi kot sine-Gordonova enačba pri »značilnih« koordinatah, kjer je $\alpha = 1/2(x - ct)$ in $\beta = 1/2(x + ct)$.



Slika 4: Polarni zemeljski (geodetski) parametri v diferencialni geometriji za Bäcklundove pretvorbe

Če je $w = \phi(\alpha, \beta)$ rešitev enačbe (2b), je $w_1 = \phi(\alpha m, \beta/m)$ tudi rešitev, kjer je m konstanta. Potemtakem lahko z rešitvijo te enačbe dobimo iz ene navidezne krogelne površine neskončno število drugih navidezni krogelnih površin. Lamb [3] je ponovno vpeljal standardno Bäcklundovo pretvorbo sine-Gordonove enačbe (2b), ki pušča enačbo nespremenjeno, in uporabil to pretvorbo za izoblikovanje večvalovnih rešitev. Slika 5 prikazuje analitično rešitev, znano kot »nepremični počivalnik« (*stationary breather*), ki je matematično izražena takole:

$$\psi(x, t) = 4 \arctan V \quad (3)$$

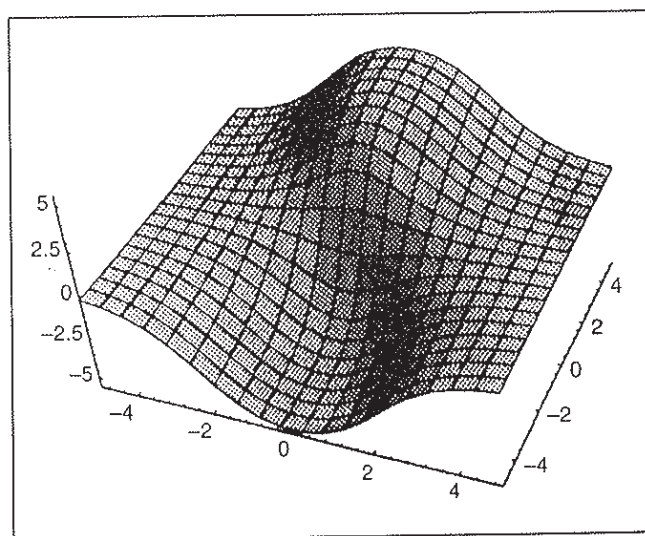
$$\text{kjer je } V = \frac{(1 - \lambda^2)^{1/2}}{\lambda} \frac{\sin\{\lambda(t - t_0)\}}{\cosh\{(1 - \lambda^2)^{1/2}(x - x_0)\}}$$

in predstavlja še eno rešitev sine-Gordonove enačbe. Ta resnično analitična rešitev ustreza naši izračunani numerični rešitvi za nabiranje tkanine, kjer se tkanina guba bodisi navzgor v nasprotni smeri sile težnosti bodisi navzdol v smeri sile težnosti, kot je prikazano na sliki 5.

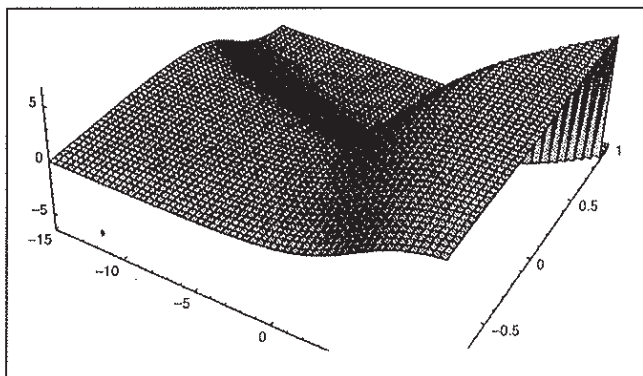
Na sliki 6 je prikazan primer ene od mnogih rešitev, ki jih lahko dobimo z uporabo Bäcklundovih pretvorb, dvo-valovno rešitev:

$$\psi(x, t) = \left(\frac{4 \arctan(\lambda_1 + \lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) x \cdot \left(\frac{\exp \lambda_1 x + t/\lambda_1 + \mu_1 - \exp \lambda_2 x + t/\lambda_2 + \mu_2}{1 + \exp \theta_1 + \theta_2} \right) \quad (4)$$

za sine-Gordonovo enačbo (2), kjer pride do nelinearnega trčenja obeh krivulj s faznim premikom μ .



Slika 5: Matematični »nepremični počivalnik«, analitična rešitev (enačba 3) za sine-Gordonovo enačbo (2), ki ustreza naši numerični rešitvi za nabiranje ali gubanje tkanine na slikah 2 in 3



Slika 6: 2-valovna rešitev (enačba 4) sine-Gordonove enačbe (2)

Na kratko lahko povzamemo, da danes lahko izdelamo dinamičen model tridimenzijskega gubanja tkanine z uporabo sistema osamljenega vala, ki ga je mogoče integrirati oziroma ustreznih enačb, iz katerih lahko dobimo prave analitične rešitve, ki nam dajo vse sile in momente v tkanini in geometriji nagubane tkanine.

4.0 SKLEP

Prikazali smo uporaben matematični model dvodimenzijske deformacije nabiranja, gubanja in mečkanja tkanine, za katerega smo analizirali cel spekter numerično izračunanih rešitev. Matematično natančno smo opisali profile nabrane oziroma nagubane tkanine kakor tudi enostavne in višje kompleksne oblike deformacije tkanine, ki nastanejo pri različnih vrednostih mehanskih parametrov tkanine pri danem skupku robnih pogojev. Lastnosti tkanin, ki smo jih upoštevali pri matematični analizi, vključujejo upogibno trdnost tka-

nine in upogibno dolžino oziroma upogibno trdnost na enoto mase tkanine.

Pokazali smo, kako naj bi z osnovnim matematičnim pristopom napovedovali dinamično obnašanje tkanine in tekstilnega materiala pri obdelavi in krojenju, s tem da bi enostavno rešili določene primere matematičnih diferencialnih enačb, ki jih prištevamo v družino Klein-Gordonovih enačb.

Pri teh enačbah je tudi zelo pomembno, da so bile njihove analitične (t.i. rešitve osamljenega vala) rešitve matematično dokazane in so uporabne pri vseh pogojih. Razen tega se izognemo težavam pri računanju, ko iščemo numerične rešitve za visoko nelinearne probleme. Uporaba tega analitičnega pristopa v mehaniki in dinamiki tkanine je zelo učinkovito orodje pri reševanju številnih perečih problemov v tekstilni in oblačilni tehnologiji.

Viri

- [1] PEIRCE, FT. The handle of cloth as a measurable quantity. *Journal of Textile Institute*, 1930, vol. 21, T377.
- [2] EISENHART, LP. *A treatise on differential geometry of curves and surfaces*. Ginn. Boston, Mass., 1936.
- [3] LAMB, GL., BÄCKLUND, JR. Transformations for certain nonlinear evolution equations. *Journal of Mathematics and Physics*, 1967, vol. 15, p. 2157-65

Prevod: Marinka Mrak

Članek je bil podan kot referat na 2. mednarodni konferenci IMCEP - Inoviranje in modeliranje procesov oblačilnega inženirstva v Mariboru/ The paper was presented on 2nd international conference IMCEP - Innovation and Modelling of Clothing Engineering Processes in Maribor, Slovenia.